Федеральное агентство по образованию

Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Государственный технологический университет
«Московский институт стали и сплавов»
Новотроицкий филиал

Д. Д. Изаак

Т. П. Филоненко

А. В. Швалева

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

(ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ)

Учебно-методическое пособие

Новотроицк 2007

УДК 517.3

ББК 22.161.1

И32

Научный редактор

Бонди И. Л., *кандидат физико-математических наук*

Рецензенты:

Пасиков В. Л., *кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и информатики ОГТИ*

Пергунов В. В., *кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математического анализа и информатики ОГТИ*

Изаак, Д. Д. Математический анализ (интегральное исчисление функции одной переменной): учебно-методическое пособие / Д. Д. Изаак, Т. П. Филоненко, А. В. Швалёва. – Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ», 2007. – 82 с.

ISBN 978-5-903472-05-5

В учебно-методическом пособии рассмотрены теоретические сведения (определения, формулы, теоремы) по курсу математического анализа, раздел «Интегральное исчисление функций одной переменной», а также большое число примеров с подробным решением. Пособие содержит индивидуальные задания для студентов технических вузов по данному учебному курсу и предназначено для обеспечения самостоятельной работы по освоению курса. Пособие ориентировано на студентов технических и экономических специальностей заочной формы обучения.

ISBN 978-5-903472-05-5

Оглавление

Введение

Разнообразие литературы по разделу «Интегральное исчисление функций одной переменной», различная форма изложения вопросов данного раздела, ограниченное время общения студентов заочной формы обучения с преподавателем делают процесс самостоятельного изучения курса студентами несколько затруднительным. Это и послужило причиной к написанию данного учебно-методического пособия.

В данном пособии предлагается краткое изложение теории с подробным решением типовых задач. Представленный теоретический материал ни в коей мере не заменяет учебник. В пособии рассматриваются лишь необходимые понятия, определения, формулы и методы решения типовых задач в рамках программы. Пособие содержит рекомендации для студентов заочной формы обучения по изучению раздела «Интегральное исчисление функций одной переменной» и пять глав: I – неопределенный интеграл, II – определенный интеграл и его геометрические приложения, III – несобственный интеграл, IV – дополнительные и тестовые задания, V – контрольные работы. По окончании каждой главы предлагаются вопросы для самопроверки степени усвоения рассмотренного материала.

Рекомендации для студентов заочной формы обучения по изучению раздела «Интегральное исчисление функций одной переменной»

Ведущей формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа (работа с учебным материалом, выполнение контрольных работ), а также работа с преподавателем (лекции, практические занятия, лабораторные занятия, консультации).

Во время экзаменационной сессии для вас (студентов заочной формы обучения) организуются лекции и практические занятия по данному разделу

«Интегральное исчисление функций одной переменной». Они носят в основном обзорный характер. Цель этих занятий: обратить ваше внимание на общую схему построения этого учебного раздела, подчеркнуть важные места и указать основные практические приложения данного теоретического материала.

Для успешного выполнения контрольных работ и дальнейшей сдачи экзамена необходимо соблюдать следующие рекомендации.

При работе с учебником (или лекционным материалом):

- сначала необходимо изучить тематическое построение курса «Интегральное исчисление функций одной переменной»;

- переходить к изучению следующего вопроса целесообразно только после детального рассмотрения предыдущего материала;

- прорабатывая учебный материал, следует обращать внимание на определение основных понятий курса и теоремы (при доказательстве теорем полезно составлять схемы доказательств);

- при изучении курса необходимо осуществлять детальный разбор типовых примеров, выполняя на бумаге все вычисления.

Для успешного освоения материала необходимо решить как можно большее количество задач самостоятельно.

При решении задач:

- необходимо указать номер решаемой задачи и полностью записать её условие;

- обосновать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса (если вы видите несколько путей решения задачи, то сравните их и выберете самый оптимальный);

- следует подробно записывать ход ваших рассуждений, вычисления должны располагаться в строгом порядке, при этом рекомендуется отделить вспомогательные вычисления от основных (чертежи можно выполнять от руки, но аккуратно и в соответствии с данными условиями; если чертежи требуют тщательного выполнения, например, при графической проверке решения, полученного путем вычисления, то следует пользоваться линейкой, транспортиром, лекалом и указывать масштаб);

- необходимо довести её выполнение до окончательного ответа (в промежуточных вычислениях не следует вместо корней, числа π и т.д., подставлять приближённые значения);

- полученный ответ проверить способами, вытекающими из существа данной задачи.

После изучения каждой главы рекомендуется осуществлять самопроверку для оценки степени усвоения рассмотренных вопросов.

При осуществлении самопроверки:

- попытайтесь воспроизвести по памяти определения, выводы, формулы, формулировки и доказательства теорем, проверяя каждый раз себя по учебнику (лекции или учебно-методическому пособию);

- ответьте на предлагаемые вам в данном пособии по окончании каждой главы вопросы для самопроверки, которые помогут проверить прочность усвоения изученного материала и получить объективную оценку вашей степени усвоения.

В процессе изучения курса вам необходимо выполнить самостоятельно две контрольные работы и вовремя сдать их на проверку. Рецензии, полученные Вами на эти работы в ходе их проверки, позволят судить о степени усвоения соответствующего раздела и укажут на имеющиеся у вас пробелы, на возможное направление дальнейшей работы, помогут сформулировать вопросы для консультаций.

При выполнении контрольных работ необходимо помнить:

- контрольные работы нужно выполнять самостоятельно (несамостоятельно выполненная работа не дает возможности преподавателю

– рецензенту указать вам на недостатки в усвоении учебного материала, в результате чего вы не приобретёте необходимых знаний и окажетесь неподготовленными к устному или письменному экзамену);

- ***прорецензированные контрольные работы со всеми исправлениями и дополнениями, сделанными по требованию преподавателя, следует сохранять (без предъявления прорецензированных контрольных работ Вы не можете быть допущены к сдаче зачета или экзамена).***

Номер варианта контрольной работы соответствует последней цифре номера зачетной книжки.

ГЛАВА I. Неопределенный интеграл

1.1. Понятие и свойства неопределенного интеграла

<u>Определение 1.</u> Функция $F(x)$ называется первообразной функцией для данной функции $f(x)$ на данном промежутке, если на этом промежутке $F'(x) = f(x)$.

Для первообразной справедлива следующая теорема.

<u>Теорема 1.</u> Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные для функции $f(x)$, то разность между ними равна постоянному числу.

Из теоремы следует, что если известна какая-либо первообразная $F(x)$ данной функции $f(x)$, то всё множество первообразных для $f(x)$ исчерпывается функциями $F(x)+C$, где C – const.

Таким образом, очевиден тот факт, что если операция дифференцирования функции однозначна, то нахождение первообразной для функции возможно лишь с точностью до некоторого постоянного слагаемого.

<u>Определение 2</u>. Выражение вида $F(x)+C$, где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ и C – произвольная постоянная, называется неопределённым интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$, причём $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением , x – переменной интегрирования.

Таким образом, по определению $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Возникает вопрос: для всякой ли функции существует интеграл? На этот вопрос отвечает следующая теорема.

<u>Теорема 2.</u> Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, то на этом сегменте у функции $f(x)$ существует первообразная $F(x)$.

Можно отметить свойства неопределенного интеграла, которые вытекают из определения:

1. Дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению, т.е.

$$d\int f(x)dx = f(x)dx\,,$$

и значит $\dfrac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$.

2. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого, т.е.

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

4. Интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций

$$\int \left(f_1(x) + f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

Свойство 4 распространяется на случай алгебраической суммы любого конечного числа функций.

Основные интегралы приведены в таблице 1.

Таблица 1

Таблица основных интегралов

1	$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	**2**	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
3	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$	4	$\int e^x dx = e^x + C$
5	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	6	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$
7	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C$	8	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C$
9	$\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + C$	10	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$

11	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{x-a}{x+a}\right\| + C$	12	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 + a}\right\| + C$
13	$\int dx = x + C$	14	$\int 0\, dx = C$

Таблица содержит формулы, легко проверяемые дифференцированием.

1.2. Основные методы интегрирования

Непосредственное интегрирование

Этот метод связан с приведением подынтегрального выражения к табличной форме путём преобразования и применения свойств неопределённого интеграла.

Пример 1. $I = \int \left(9x^2 + \frac{2}{x^4} - \sqrt[3]{x} + x - \frac{4}{\sqrt{x}} + 5 \right) dx$

Для вычисления этого интеграла воспользуемся свойствами 3; 4.

$$I = 9\int x^2 dx + 2\int \frac{dx}{x^4} - \int \sqrt[3]{x} dx + \int x dx - 4\int \frac{dx}{\sqrt{x}} + 5\int dx$$

Для вычисления каждого интеграла, кроме последнего, воспользуемся одним и тем же табличным интегралом 1 от степенной функции при различных значениях n.

а) при $n = 2$ $\qquad \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

б) при $n = -4$ $\qquad \int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C$

в) при $n = \frac{1}{3}$ $\qquad \int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$

г) при $n = 1$ $\qquad \int x dx = \frac{x^2}{2} + C$

д) при $n = -\frac{1}{2}$ $\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$

е) при $n = 0$ $\quad \int dx = x + C$ как табличный интеграл 13

Тогда

$$I = 9 \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{1}{3x^3} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{x^2}{2} - 4 \cdot 2\sqrt{x} + 5x + C =$$

$$= 3x^3 - \frac{2}{3x^3} - \frac{3}{4} x\sqrt[3]{x} + \frac{x^2}{2} - 8\sqrt{x} + 5x + C$$

Обращаем внимание на то, что в конце решения записываем одну общую постоянную.

Пример 2. $I = \int \frac{x^5 - x^4 + 3}{x^2} dx$.

$$I = \int \left(\frac{x^5}{x^2} - \frac{x^4}{x^2} + \frac{3}{x^2} \right) dx = \int \left(x^3 - x^2 + 3x^{-2} \right) dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 3 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{x} + C$$

Пример 3. $I = \int \frac{dx}{2^x}$.

Учитывая, что $\frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2} \right)^x$, воспользуемся табличным интегралом 3 при $a = \frac{1}{2}$, тогда

$$\int \frac{dx}{2^x} = \int \left(\frac{1}{2} \right)^x dx = \frac{\left(1/2 \right)^x}{\ln \frac{1}{2}} + C = \frac{1}{2^x (\ln 1 - \ln 2)} + C = -\frac{1}{2^x \ln 2} + C$$

Пример 4. $I = \int 4^{2x+1} dx$.

Поскольку $4^{2x+1} = 4 \cdot 16^x$, то, используя свойство 3 и табличный формулу интеграл 3**,** получим:

$$\int 4^{2x+1} dx = 4 \int 16^x dx = 4 \cdot \frac{16^x}{\ln 16} + C$$

Пример 5. $I=\int\frac{dx}{4x^2-1}$.

Так как $\frac{1}{4x^2-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2-\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$, то можно использовать свойство 3 и табличный интеграл 11 при $a=\frac{1}{2}$, тогда

$$I=\int\frac{1}{4}\cdot\frac{dx}{x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|+C$$

Пример 6. $I=\int\frac{dx}{9x^2+25}$.

Поскольку $\frac{1}{9x^2+25}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{x^2+\frac{25}{9}}$, можно воспользоваться свойством 3 и табличным интегралом 9 при $a=\frac{5}{3}$. Тогда

$$I=\int\frac{1}{9}\cdot\frac{dx}{x^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2}=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x^2+\left(\frac{5}{3}\right)^2}=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\frac{5}{3}}arctg\frac{x}{\frac{5}{3}}+C=$$

$$=\frac{3}{9\cdot 5}arctg\frac{3x}{5}+C=\frac{1}{15}atctg\frac{3x}{5}+C$$

Пример 7. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$.

Воспользуемся табличным интегралом 10 при $a=\sqrt{3}$:

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+C$$

Пример 8. $I=\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2+7}}$.

Так как

$$\frac{1}{\sqrt{9x^2+7}}=\frac{1}{\sqrt{9\left(x^2+\frac{7}{9}\right)}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{7}{9}}},$$

то можно использовать 3 и табличный интеграл 12**,** тогда

$$I=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{7}{9}}}=\frac{1}{3}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{7}{9}}\right|+C$$

Пример 9. $I=\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$.

Преобразуем подынтегральную функцию

$$\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2=\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}=$$

$$=\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=1+\sin 2\cdot\frac{x}{2}=1+\sin x.$$

Тогда

$$I=\int(1+\sin x)dx=\int dx+\int\sin xdx=x-\cos x+C$$

Пример 10. $I=\int\frac{x^2}{x^2+4}dx$.

Выделяя из дроби целую часть, получим:

$$\frac{x^2}{x^2+4}=\frac{\left(x^2+4\right)-4}{x^2+4}=\frac{x^2+4}{x^2+4}-\frac{4}{x^2+4}=1-\frac{4}{x^2+4}.$$

Тогда

$$I=\int\left(1-\frac{4}{x^2+4}\right)dx=\int dx-4\int\frac{dx}{x^2+4}=x-4\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+C=x-2arctg\frac{x}{2}+C$$

Замена переменной интегрирования

В тех случаях, когда интеграл $\int f(x)dx$ не может быть преобразован к табличному, сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную. Тогда

$$f(x)=f(\varphi(t)),\ dx=\varphi'(t)dt \text{ и}$$

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad (1)$$

Формула (1) называется формулой замены переменной в неопределённом интеграле.

Пример 11. $I=\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Проведем подстановку $x=t^2$, тогда $dx=(t^2)'dt=2tdt$,

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int \frac{e^t\cdot 2tdt}{t}=2\int e^t dt=2e^t+C=2e^{\sqrt{x}}+C$$

Иногда вместо подстановки $x=\varphi(t)$ лучше выполнить замену переменной вида $t=g(x)$.

Пример 12. $I=\int \sqrt[5]{x+2}dx$.

Чтобы привести интеграл к табличному интегралу 1, сделаем замену переменной вида $x+2=t$, тогда $dt=d(x+2)=(x+2)'dx=dx$.

Тогда

$$I=\begin{bmatrix} x+2=t \\ dt=dx \end{bmatrix}=\int \sqrt[5]{t}dt=\int t^{\frac{1}{5}}dt=\frac{t^{\frac{6}{5}}}{6/5}+C=\frac{5}{6}\sqrt[5]{t^6}+C$$

Вернемся к старой переменной:

$$I=\frac{5}{6}\sqrt[5]{(x+2)^6}+C=\frac{5}{6}(x+2)\sqrt[5]{x+2}+C$$

Пример 13. $I=\int \frac{dx}{4x+3}$.

Чтобы воспользоваться табличным интегралом 2, сделаем замену переменной $4x+3=t$, тогда $d(4x+3)=dt$, т.е. $(4x+3)'dx=dt$ или $4dx=dt$. Тогда $dx=dt/4$.

Получаем:

$$\int \frac{dx}{4x+3}=\int \frac{dt/4}{t}=\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t}=\frac{1}{4}\ln|t|+C=\frac{1}{4}\ln|4x+3|+C.$$

<u>Пример 14.</u> $I=\int e^{-3x+5}dx$.

Чтобы воспользоваться табличным интегралом 4, выполним замену переменной $-3x+5=t$, т.е. $dt=(-3x+5)'dx=-3dx$. Тогда

$$I=\int e^t\left(-\frac{1}{3}\right)dt=-\frac{1}{3}\int e^t dt=-\frac{1}{3}e^t+C=-\frac{1}{3}e^{-3x+5}+C.$$

<u>Пример 15.</u> $I=\int \sin(7x+2)dx$.

Обратите внимание на оформление вычисления интеграла:

$$I=\begin{bmatrix} 7x+2=t \\ dt=7dx \\ dx=\frac{1}{7}dt \end{bmatrix}=\int \sin t\cdot\frac{1}{7}dt=\frac{1}{7}\int \sin tdt=\begin{bmatrix} \textit{воспользуемся} \\ \textit{табличной формулой } 5 \end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{7}\cos t+C=\begin{bmatrix} \textit{вернемся} \\ \textit{к старой} \\ \textit{переменной} \end{bmatrix}=-\frac{1}{7}\cos(7x+2)+C$$

<u>Пример 16.</u> $I=\int x\cos x^2dx$.

$$\int x\cdot\cos x^2dx=\begin{bmatrix} x^2=t \\ dt=2xdx \\ xdx=\frac{1}{2}dt \end{bmatrix}=\int \cos t\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int \cos tdt=\frac{1}{2}\sin t+C=\frac{1}{2}\sin x^2+C$$

<u>Пример 17.</u> $I=\int \frac{xdx}{x^2+4}$.

Чтобы воспользоваться табличным интегралом 2, выполним замену переменной $x^2+4=t$.

Тогда

$$I=\begin{bmatrix} x^2+4=t \\ dt=(x^2+4)'dx \\ dt=2xdx \\ xdx=\frac{1}{2}dt \end{bmatrix}=\int \frac{\frac{1}{2}dt}{t}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+C.$$

Пример 18. $I = \int \frac{\sqrt{3+\ln x}}{x} dx$.

Чтобы воспользоваться табличным интегралом 1, следует выполнить замену переменной $3+\ln x = t$, тогда $dt = (3+\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx$. Тогда

$$I = \int \sqrt{t} dt = \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C = \frac{2}{3} t\sqrt{t} + C =$$

$$= \frac{2}{3}(3+\ln x)\sqrt{3+\ln x} + C$$

Пример 19. $I = \int \frac{xdx}{x^4 - 9}$.

Для того, чтобы воспользоваться табличным интегралом 11, следует выполнить замену переменной $x^2 = t$, тогда $dt = 2xdx$, откуда $xdx = \frac{1}{2} dt$ и

$$\int \frac{xdx}{\left(x^2\right)^2 - 3^2} = \int \frac{\frac{1}{2} dt}{t^2 - 3^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 - 3^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{12} \ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + C = \frac{1}{12} \ln\left|\frac{x^2-3}{x^2+3}\right| + C.$$

Интегрирование по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции. Как известно, $d(uv) = udv + vdu$, откуда $udv = d(uv) - vdu$. Интегрируя последнее соотношение, получим:

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu \text{ или}$$

$$\int udv = uv - \int vdu. \quad (2)$$

Формула (2) называется формулой интегрирования по частям. Применение метода интегрирования по частям целесообразно в том случае, если интеграл в правой части формулы (2) окажется более простым для вычисления, чем исходный интеграл.

Можно указать типы интегралов, для нахождения которых применяется формула интегрирования по частям:

I. $\int P_n(x)\cdot\sin\alpha\, xdx, \int P_n(x)\cos\alpha\, xdx, \int P_n(x)\cdot e^{\alpha x}, \int P_n(x)a^{\alpha x}dx$,

где $P_n(x)$ – многочлен n-ой степени от x. Для нахождения интегралов из этой группы полагают $P_n(x)=u$, произведение остальных сомножителей подынтегрального выражения задает dv.

II. $\int P_n(x)\ln\alpha\, xdx, \int P_n(x)\arcsin xdx, \int P_n(x)\arccos xdx$

$\int P_n(x)arctgxdx, \int P_n(x)arcctgxdx$.

Для нахождения интегралов из этой группы полагают $P_n(x)dx=dv$, оставшийся сомножитель подынтегрального выражения задает u.

III. $\int e^{\alpha x}\sin\beta\, xdx, \int e^{\alpha x}\cos\beta\, xdx$.

Для нахождения интегралов этой группы полагают $u=e^{\alpha x}$, произведение остальных сомножителей подынтегрального выражения задает dv.

На практике метод интегрирования по частям часто комбинируется с другими методами интегрирования.

Пример 20. $I=\int(2x+3)\sin xdx$.

Этот интеграл относится к интегралам I группы, поэтому:

$$\begin{bmatrix} u=2x+3 & du=2dx \\ dv=\sin xdx & v=\int\sin xdx=-\cos x \end{bmatrix}$$

Воспользуемся формулой (2):

$$I=uv-\int vdu=-(2x+3)\cos x-\int 2(-\cos x)dx=-(2x+3)\cos x+2\int\cos xdx=$$

$$=-(2x+3)\cos x+2\sin x+C$$

Пример 21. $I=\int x^2\ln xdx$.

Этот интеграл относится к интегралам II группы, поэтому:

$$I=\begin{bmatrix} u=\ln x & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=x^2dx & v=\int x^2dx=\dfrac{x^3}{3}\end{bmatrix}=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}+C=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}+C$$

__Пример 22.__ $I=\int x^2\cos 3xdx$.

Этот интеграл относится к интегралам I группы, поэтому:

$$I=\begin{bmatrix} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=\cos 3xdx & v=\int\cos 3xdx=\dfrac{1}{3}\sin 3x\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}x^2\sin 3x-\frac{2}{3}\int x\sin 3xdx=\frac{1}{3}x^2\sin 3x-\frac{2}{3}I_1$$

Для вычисления интеграла I_1 интегрирование повторно применяется по частям.

$$I_1=\int x\sin 3xdx=\begin{bmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\sin 3xdx & v=\int\sin 3xdx=-\dfrac{1}{3}\cos 3x\end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{3}x\cos 3x-\int-\frac{1}{3}\cos 3xdx=-\frac{1}{3}x\cos 3x+\frac{1}{3}\int\cos 3xdx=$$

$$=-\frac{1}{3}x\cos 3x+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\sin 3x=-\frac{1}{3}x\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x$$

Тогда $I=\frac{1}{3}x^2\sin 3x-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}x\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x\right)+C=$

$$=\frac{1}{3}x^2\sin 3x+\frac{2}{9}x\cos 3x-\frac{2}{27}\sin 3x+C$$

Самопроверка

Мы рассмотрели три метода интегрирования функций, которые широко применяются при решении задач №1,3,6 контрольной работы №3. Вам необходимо повторить теоретический материал по данной теме в учебнике Шипачева В.С. «Высшая математика», глава 7, параграфы 1-4. Затем приступить к самостоятельному решению задач из «Задачника по высшей математике» Шипачева В.С., глава 6, параграфы 1-2, №1-30, 36, 38, 41, 44, 49, 56, 59, 61, 64, 66, 76, 83, 93, 102, 109, 114, 120, 125. Только после этого проверить качество усвоения данного материала с помощью примеров для самоконтроля.

Примеры для самопроверки приведены в таблице 2.

Таблица 2

Примеры для самопроверки

№	Вычислите интегралы	Ответы	Баллы
1	$\int\left(x^3+3x-2\sqrt[3]{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{7}{\sqrt{x}}+2\right)dx$	$\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^4}-\frac{5}{x}-14\sqrt{x}+2x+C$	1
2	$\int\frac{x^2dx}{x^2+3}$	$x-\sqrt{3}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+C$	2
3	$\int\frac{1-2\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$	$-ctgx+2\cos x+C$	2
4	$\int e^{x^3}x^2dx$	$\frac{1}{3}e^{x^3}+C$	3
5	$\int\frac{arctg^3 x}{1+x^2}dx$	$\frac{1}{4}arctg^4 x+C$	3
6	$\int\frac{dx}{x^2+6x+11}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x+3}{\sqrt{2}}+C$	4
7	$\int x^2\ln xdx$	$\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$	5
8	$\int xe^x dx$	xe^x-e^x+C	5

Теперь проверьте себя, подсчитав число набранных баллов по следующей схеме.

а) Если вы набрали от 0 до 15 баллов, то вам следует еще раз изучить данный учебный материал и прорешать как можно большее число указанных примеров.

б) Если вы набрали от 16 до 21 баллов, то вы можете смело приступать к решению задач №1,3,6 из контрольной работы №3. Хотя при решении указанных задач вы, наверное, будете испытывать небольшие затруднения.

в) Если вы набрали от 22 до 25 баллов, то данный материал вы хорошо усвоили. Авторы пособия надеются, что решения указанных примеров никаких трудностей у вас не вызовет.

1.3. Интегрирование простейших рациональных дробей

<u>Определение 3.</u> Рациональные дроби вида

$$\text{I. } \frac{A}{x-a} \quad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q} \quad \text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l}\ ,$$

где A, a, M, N, p, q - действительные числа, k и l — натуральные числа, большие единицы, а трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, называются простейшими дробями типа I-IV.

Интегрирование простейших дробей I и II типов не представляет труда. Для вычисления интегралов от этих дробей используем замену $x-a=t$, тогда $dx=dt$.

I. $$\int\frac{Adx}{x-a}=A\int\frac{dx}{x-a}=\begin{bmatrix} x-a=t \\ dt=dx \end{bmatrix}=A\int\frac{dt}{t}=A\ln|t|+C=A\ln|x-a|+C$$

II. $$\int\frac{Adx}{(x-a)^k}=A\int\frac{dx}{(x-a)^k}=\begin{bmatrix} x-a=t \\ dt=dx \end{bmatrix}=$$

$$=A\int\frac{dt}{t^k}=A\int t^{-k}dt=A\frac{t^{-k+1}}{-k+1}+C=\frac{A}{(1-k)t^{k-1}}+C=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C$$

III. Перейдем к интегрированию простейших дробей III типа. Для этого рассмотрим интеграл от простой дроби $\int\frac{dx}{x^2+px+q}$. Чтобы применить метод замены переменной, выделим полный квадрат в знаменателе дроби:

$$x^2+px+q=\left(x^2+2x\frac{p}{2}+\frac{p^2}{4}\right)-\frac{p^2}{4}+q=(x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})$$

Так как квадратный трехчлен не имеет действительных корней, то D<0, т.е. выражение $q-\frac{p^2}{4}>0$. Обозначая $q-\frac{p^2}{4}=a^2$, получим

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+a^2}=\begin{bmatrix} x+\frac{p}{2}=t \\ dt=dx\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C=$$

$$=\frac{1}{a}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+C$$

Перейдем к интегрированию простейших дробей III типа. Для этого введем подстановку $x^2+px+q=z$, тогда $dz=(2x+p)dx$, $Mx+N=\frac{M}{2}(2x+p)-\frac{Mp}{2}+N$. Поэтому

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{M}{2}(2x+p)+(N-\frac{Mp}{2})}{x^2+px+q}dx=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q}+(N-\frac{Mp}{2})\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{dz}{z}+(N-\frac{Mp}{2})\int\frac{dx}{x^2+px+q}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln|z|+(N-\frac{Mp}{2})\cdot\frac{1}{a}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{a}+C=$$

$$=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{1}{a}(N-\frac{Mp}{2})arctg\frac{2x+p}{2a}+C.$$

IV. Рассмотрим интегрирование простейших дробей IV типа. С помощью той же подстановки получим:

$$J=\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l}dx=\begin{bmatrix} x^2+px+q=z \\ dz=(2x+p)dx\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^l}+(N-\frac{Mp}{2})\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^l}=$$

$$=\frac{M}{2}\int\frac{dz}{z^l}+(N-\frac{Mp}{2})J_l=\frac{M}{2(1-l)}\cdot\frac{1}{z^{l-1}}+(N-\frac{Mp}{2})J_l=$$

$$=\frac{M}{2(1-l)}\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^{l-1}}+(N-\frac{Mp}{2})J_l$$

Для вычисления интеграла J_l получим рекуррентную формулу, т.е. формулу, сводящую вычисление интеграла J_l к вычислению интеграла J_{l-1}.

С этой целью рассмотрим интеграл J_l:

$$J_l=\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^l}=\begin{bmatrix} x+\frac{p}{2}=t \\ dt=dx \end{bmatrix}=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^l}=\frac{1}{a^2}\int\frac{a^2+t^2-t^2}{(t^2+a^2)^l}dt=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left(\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{l-1}}-\int\frac{t\cdot tdt}{(t^2+a^2)^l}\right)=\frac{1}{a^2}(J_{l-1}-J^*).$$

Для вычисления J^* применим формулу интегрирования по частям.

$$\mathrm{J}^*=\int\frac{t\cdot tdt}{(t^2+a^2)^l}=\begin{bmatrix} u=t & du=dt \\ dv=\frac{tdt}{(t^2+a^2)^l} & v=\frac{1}{2(1-l)}\frac{1}{(t^2+a^2)^{l-1}} \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2(1-l)}\frac{t}{(t^2+a^2)^{l-1}}-\frac{1}{2(1-l)}\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{l-1}}=\frac{1}{2(1-l)}\frac{t}{(t^2+a^2)^{l-1}}-\frac{1}{2(1-l)}J_{l-1}.$$

Тогда

$$J_l=\frac{1}{a^2}\left(J_{l-1}-\frac{1}{2(1-l)}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^{l-1}}+\frac{1}{2(1-l)}\cdot J_{l-1}\right).$$

Следовательно, $J_l=\frac{1}{2a^2(l-1)}\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^{l-1}}+\frac{2l-3}{2a^2(l-1)}\cdot J_{l-1}$ (3)

Формула (3) и есть рекуррентная формула, которая позволяет, переходя от l к l-1, от l-1 к l-2 и т.д., довести вычисление интеграла J_l до табличного интеграла $J_1=\int\frac{dt}{t^2+a^2}$.

Рассмотрим вычисление некоторых неопределённых интегралов.

Пример 23. $I = \int \frac{3x+1}{x^2+2x+2}dx$.

$$I = \int \frac{3x+1}{x^2+2x+2}dx = \left[\begin{array}{l} \textit{используем замену} \\ \textit{переменной} \\ \quad x^2+2x+2 = z \\ \quad dz = (2x+2)dx \end{array}\right] = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2)-3+1}{x^2+2x+2}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{dz}{z} - 2\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \frac{3}{2}\ln|z| - 2J_1 = \frac{3}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| - 2J_1$$

Поскольку $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$, воспользуемся новой переменной $x+1=t$ для вычисления интеграла J_1, причём $dx = dt$, тогда

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \int \frac{dt}{t^2+1} = arctgt + C = arctg(x+1) + C$$

Таким образом $I = \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+2) - 2arctg(x+1) + C$.

Пример 24. $\int \frac{dx}{(x-7)^3}$.

Это интеграл от простейшей дроби II типа. Воспользуемся заменой переменной $x-7=t$, тогда $dt = dx$.

$$\int \frac{dx}{(x-7)^3} = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3}dt = \frac{t^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{-2t^2} + C = -\frac{1}{2(x-7)^2} + C$$

1.4. Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью называется выражение $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены.

Рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется правильной, если степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$. В противном случае дробь называется неправильной.

Всякая неправильная рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ с помощью деления числителя на знаменатель приводится к виду $\frac{P(x)}{Q(x)} = P_0(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, где $P_0(x)$ – многочлен (целая часть при делении), а $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ - правильная рациональная дробь.

Поэтому $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int P_0(x)dx + \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} dx$.

Так как $\int P_0(x)dx$ равен сумме табличных интегралов, то можно считать, что интеграл от неправильной дроби сводится к вычислению интеграла от правильной рациональной дроби.

Каждая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей указанных четырех типов с помощью теоремы.

Теорема 3. Если знаменатель правильной рациональной дроби $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ разложен на неповторяющиеся линейные и квадратные множители (не имеющие действительных корней)

$$Q(x) = (x-a)^k \cdot \ldots \cdot (x^2 + px + q)^l \cdot \ldots,$$

где k, l – натуральные числа, то эту дробь можно представить в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \ldots\ldots + \frac{A_k}{x-a} + \ldots +$$

$$+ \frac{M_1 x + N_1}{(x^2 + px + q)^l} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^{l-1}} + \ldots. + \frac{M_l x + N_l}{x^2 + px + q} + \ldots\ .$$

Коэффициенты A_1, $A_2 \ldots A_k$, M_1, $M_2, \ldots M_l$, N_1, $N_2, \ldots N_l$ – находятся с помощью метода неопределенных коэффициентов или метода частных значений.

Рассмотрим нахождение коэффициентов на примерах.

Пример 25. $I = \int \frac{2x-11}{(x-1)(x+2)}dx$.

Подынтегральная дробь – правильная. Разложим ее на сумму простейших дробей согласно вышеуказанной теореме:

$$\frac{2x-11}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}.$$

Чтобы определить коэффициенты A и B методом неопределенных коэффициентов, приводим к общему знаменателю дроби, стоящие в правой части, получим:

$$\frac{2x-11}{(x-1)(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

Так как знаменатели равны, то приравняем числители:

$$2x-11 = Ax+2A+Bx-B, \text{ или}$$

$$2x-11 = (A+B)x+(2A-B).$$

Так как многочлены равны, то приравняем коэффициенты при одинаковых степенях в правой и левой частях тождества. Будем иметь:

$$\begin{array}{c|c} x & A+B=2 \\ x^0 & 2A-B=-11 \end{array}\Bigg\}$$

Решая систему методом алгебраического сложения, получим:

$$\begin{cases} 3A=-9 \\ A+B=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-3 \\ B=5 \end{cases}$$

Окончательно получим:

$$\frac{2x-11}{(x-1)(x+2)} = \frac{-3}{x-1} + \frac{5}{x+2}$$

Тогда

$$\int \frac{2x-11}{(x-1)(x+2)}dx = \int \frac{-3dx}{x-1} + \int \frac{5dx}{x+2} = \left[\begin{array}{c} \textit{это интегралы от} \\ \textit{простейших дробей I типа} \end{array}\right] =$$

$$= -3\ln|x-1| + 5\ln|x+2| + C$$

Пример 26. $I = \int \frac{x-1}{(x+1)(x^2-4)}dx$.

Подынтегральная дробь – правильная, но знаменатель следует разложить на простые множества. Тогда дробь примет вид

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)(x+2)}.$$

Разложим дробь на простейшие дроби.

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}$$

Приведем к общему знаменателю дроби в правой части:

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)(x+2)}=\frac{A(x+2)(x-2)+B(x+1)(x+2)+C(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)(x+2)}$$

Приравняем числители:

$$x-1=A(x+2)(x-2)+B(x+1)(x+2)+C(x+1)(x-2).$$

Для нахождения коэффициентов A, B, C воспользуемся методом частных значений. Так как значения многочленов в левой и правой частях равенства равны при любых значения x, то, придавая x значения, совпадающие с действительными корнями знаменателя, получим значения A, B, C.

Пусть x = -1   -2 = А × 1 Ч (-3) + B Ч 0 + C Ч 0   -3A = -2 $A = \frac{2}{3}$

Пусть x = 2   1 = A Ч 0 + B Ч 3 Ч 4 + C Ч 0   12B =1 $B = \frac{1}{12}$

Пусть x = -2   -3 = A Ч 0 + B Ч 0 + C Ч (-1) Ч (-4)   4C = -3 C = - $\frac{3}{4}$

Таким образом

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)(x+2)}=\frac{{}^{2}\!/_{3}}{x+1}+\frac{{}^{1}\!/_{12}}{x-2}+\frac{-{}^{3}\!/_{4}}{x+2}$$

Тогда

$$\int\frac{(x-1)dx}{(x+1)(x-2)(x+2)}=\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{12}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=\frac{2}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{12}\ln|x-2|-\frac{3}{4}\ln|x+2|+C$$

Пример 27. $I = \int \frac{dx}{x^4 + x^2}$.

Подынтегральная дробь — правильная, следует только разложить знаменатель на множители: $x^4 + x^2 = x^2(x^2 + 1)$. Разложим дробь на простейшие дроби, используя теорему из предыдущего раздела.

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} \text{ или}$$

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1) + Bx(x^2+1) + x^2(Cx + D)}{x^2(x^2+1)}$$

Приравняем числители и для нахождения коэффициентов *A*, *B*, *C*, *D* воспользуемся комбинированным методом частных значений и неопределенных коэффициентов.

Полагая $x = 0$, получим $1 = A(0 + 1) + B$ Ч 0 Ч (1) + 0 Ч D, $A = 1$.

Подставляя значение *A*, будем иметь:

$1 = x^2 + 1 + Bx^3 + Bx + Cx^3 + Dx^2$ или $1 = (B + C)x^3 + (D + 1)x^2 + Bx + 1$.

Или: $0 \times x^3 + 0$Ч$x^2 + 0$Ч$x + 1 = (B + C)x^3 + (D + 1)\,x^2 + Bx + 1$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x* в левой и правой частях уравнения, получили:

$$\left.\begin{array}{l|c} x^3 & B + C = 0 \\ x^2 & D + 1 = 0 \\ x^1 & B = 0 \\ x^0 & 1 = 1 \end{array}\right\} \textit{Решая систему, найдем значения } B, C, D \begin{bmatrix} D = -1 \\ B = 0 \\ C = 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, дробь $\frac{1}{x^2(x^2+1)}$ можно заменить суммой простейших дробей $\frac{1}{x^2} + \frac{0}{x} + \frac{0x - 1}{x^2 + 1}$, интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)} = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2 + 1} = -\frac{1}{x} - arctgx + C.$$

Пример 28. $I = \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 8}$.

Заметим, что данный интеграл от рациональной дроби можно подсчитать как методом неопределенных коэффициентов, так и выделением полного квадрата в знаменателе.

$$x^2+6x+8=(x^2+2x\cdot 3+3^2)-9+8=(x+3)^2-1$$

Тогда

$$\int\frac{dx}{x^2+6x+8}=\int\frac{dx}{(x+3)^2-1}=\begin{bmatrix}\textit{используем}\quad\textit{замену}\quad\textit{переменной}\\ x+3=t\quad dt=dx\end{bmatrix}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2-1}=\begin{bmatrix}\textit{это}\quad\textit{табличный}\quad\textit{интеграл}\\ \int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+3-1}{x+3+1}\right|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+2}{x+4}\right|+C$$

Самопроверка

Рассмотрев интегрирование простейших и рациональных дробей, мы вновь возвращаемся к повторению изученного вами материала. Теперь вам предстоит повторить теоретическую часть темы по учебнику Шипачева В.С. «Высшая математика», глава 7, параграф 5, и самостоятельно решить примеры из «Задачника по высшей математике» Шипачева В.С., глава 6, №230, 236, 238, 239, 240, 243, 247, 249. Попытайтесь воспроизвести по памяти определения, выводы, формулы, формулировки и доказательства теорем, проверяя себя каждый раз по учебнику, лекции или учебно-методическому пособию. Решите предлагаемые вам примеры и оцените степень вашего усвоения изученного материала. Это поможет вам при решении примеров №2,4 из контрольной работы №3.

Примеры для самопроверки приведены в таблице 3.

Таблица 3

Примеры для самопроверки

№	Вычислите интегралы	Ответы	Баллы
1	$\int \frac{dx}{x+2}$	$\ln\lvert x+2\rvert + C$	1
2	$\int \frac{dx}{5-x}$	$-\ln\lvert 5-x\rvert + C$	2
3	$\int \frac{dx}{(x-7)^3}$	$-\frac{1}{2(x-7)^2}+C$	2
4	$\int \frac{dx}{x^2+3x+5}$	$\frac{2}{\sqrt{11}} arctg \frac{2x+3}{\sqrt{11}}+C$	3
5	$\int \frac{3x+2}{x^2-2x+7}dx$	$\frac{3}{2}\ln\lvert x^2-2x+7\rvert+\frac{5}{\sqrt{6}} arctg \frac{x-1}{\sqrt{6}}+C$	3
6	$\int \frac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4}$	$\ln\lvert x+1\rvert+\frac{4}{x+2}+C$	4
7	$\int \frac{dx}{x^3+x}$	$\ln\frac{\lvert x\rvert}{\sqrt{x^2+1}}+C$	5
8	$\int \frac{xdx}{x^3-1}$	$\frac{1}{3}\ln\lvert x-1\rvert-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$	5

Теперь проверьте себя, подсчитав число набранных баллов по следующей схеме.

а) Если вы набрали от 0 до 15 баллов, то вам следует еще раз изучить данный учебный материал и прорешать как можно большее число указанных примеров.

б) Если вы набрали от 16 до 21 баллов, то вы можете смело приступать к решению задач №2,4 из контрольной работы №3. Хотя при решении указанных задач вы, наверное, будете испытывать небольшие затруднения.

в) Если вы набрали от 22 до 25 баллов, то данный материал вы хорошо усвоили. Авторы пособия надеются, что решения указанных примеров никаких трудностей у вас не вызовет.

1.5. Интегрирование некоторых тригонометрических выражений

1. Рассмотрим интегралы вида

$$\int R(\sin x)\cos x dx,\quad \int R(\cos x)\sin x dx,\quad \int R(tgx)\frac{dx}{\cos^2 x},\quad \int R(ctgx)\frac{dx}{\sin^2 x},$$

где R — рациональная функция.

Такие интегралы с помощью замены переменной могут быть сведены к интегралам от рациональных функций.

$$\int R(\sin x)\cos x dx = \begin{bmatrix} \textit{используем} & \textit{замену} \\ \sin x = t & dt = \cos x dx \end{bmatrix} = \int R(t)dt$$

$$\int R(\cos x)\sin x dx = \begin{bmatrix} \cos x = t \\ dt = -\sin x dx \end{bmatrix} = -\int R(t)dt$$

$$\int R(tgx)\frac{dx}{\cos^2 x} = \begin{bmatrix} tgx = t \\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{bmatrix} = \int R(t)dt$$

$$\int R(ctgx)\frac{dx}{\sin^2 x} = \begin{bmatrix} ctgx = t \\ dt = -\dfrac{dx}{\sin^2 x} \end{bmatrix} = -\int R(t)dt$$

<u>**Пример 29.**</u> $I = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 7} dx$.

$$\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + 7} = \begin{bmatrix} \textit{используем} & \textit{замену} & \textit{переменной} \\ \sin x = t & dt = \cos x dx & \end{bmatrix} =$$

$$\int \frac{dt}{t^2 + 7} = \begin{bmatrix} \textit{табличный} \\ \textit{интеграл} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{7}} arctg\frac{t}{\sqrt{7}} + C = \frac{1}{\sqrt{7}} arctg\frac{\sin x}{\sqrt{7}} + C$$

2. Рассмотрим интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Такие интегралы можно свести к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки, называемой универсальной тригонометрической подстановкой:

$$tg\frac{x}{2} = t, \text{ где } -\pi < x < \pi .$$

Тогда

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ x=2arctgt,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

А значит,

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R(\frac{2t}{1+t^2};\frac{1-t^2}{1+t^2})\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int R_1(t)dt.$$

Пример 30. $I=\int\frac{dx}{5-3\cos x}$.

$$\int\frac{dx}{5-3\cos x}=\left[\begin{array}{c}\textit{воспользуемся универсальной}\\ \textit{тригонометрической подстановкой}\\ tg\frac{x}{2}=t,\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right]=$$

$$\int\frac{2dt}{(1+t^2)\cdot\frac{(5+5t^2-3+3t^2)}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{8t^2+2}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2+\frac{1}{4}}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1/2}\cdot arctg\frac{t}{1/2}+C=\frac{1}{2}arctg2t+C=\frac{1}{2}arctg(2tg\frac{x}{2})+C$$

3. Рассмотрим интегралы вида $J_{m,n}=\int\sin^n x\cdot\cos^m xdx$, где m, n – натуральные числа.

а) Если m, n – четные числа, то интегралы $J_{m,n}$ находятся с помощью тригонометрических формул:

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),\ \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x),\ \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Пример 31. $I=\int\sin^2 x\cos^2 xdx$.

$$I=\left[\begin{array}{cc}\textit{воспользуемся} & \textit{формулами}\\ \sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x), & \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\end{array}\right]=$$

$$\frac{1}{4}\int(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{4}\int(1-\cos^2 2x)dx=\frac{1}{4}\int\sin^2 2xdx=$$

$$=\left[\begin{array}{ll} \textit{воспользуемся} & \textit{формулой} \\ \sin^2 2x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 4x) & \end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int(1-\cos 4x)dx=\frac{1}{8}\left(\int dx-\int\cos 4xdx\right)=\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+C$$

б) Если хотя бы одно из чисел m или n нечетное, то от нечетной степени отделяется множитель первой степени и вводится новая переменная.

<u>Пример 32.</u> $I=\int\sin^3 x\cos^2 xdx$.

$$\int\sin^3 x\cos^2 xdx=\left[\begin{array}{lll} \textit{отделим} & \textit{от} & \textit{нечетной} \\ \textit{степени} & \textit{множитель} & \\ \textit{первой} & \textit{степени} & \end{array}\right]=$$

$$\int\sin^2 x\cos^2 x\sin xdx=\left[\begin{array}{c} \textit{воспользуемся формулой} \\ \sin^2 x=1-\cos^2 x \end{array}\right]=$$

$$\int(1-\cos^2 x)\cos^2 x\sin xdx=\left[\begin{array}{lll} \textit{введем} & \textit{новую} & \textit{переменную} \\ \cos x=t, & dt=-\sin xdx & \\ & & \end{array}\right]=$$

$$-\int(1-t^2)t^2dt=-\int(t^2-t^4)dt=-\int t^2dt+\int t^4dt=-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+C=$$

$$=\left[\begin{array}{lll} \textit{вернемся} & \textit{к} & \textit{старой} \\ \textit{переменной} & & \\ & & \end{array}\right]=-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x+C$$

4. Рассмотрим интегралы вида

$$\int\sin ax\sin bxdx,\quad \int\sin ax\cos bxdx,\quad \int\cos ax\cos bxdx.$$

Для их вычисления воспользуемся известными тригонометрическими формулами:

$$\sin ax\sin bx=\frac{1}{2}(\cos(a-b)x-\cos(a+b)x)$$

$$\sin ax\cos bx=\frac{1}{2}(\sin(a+b)x+\sin(a-b)x)$$

$$\cos ax\cos bx=\frac{1}{2}(\cos(a-b)x+\cos(a+b)x)$$

Пример 33. $I=\int\cos 6x\cos 4x dx$.

$$\int\cos 6x\cos 4x dx=\left[\begin{array}{c}т.к.\\ \cos 6x\cos 4x=\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 10x)\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\int(\cos 2x+\cos 10x)dx=\frac{1}{2}\int\cos 2x dx+\frac{1}{2}\int\cos 10x dx=$$

$$=\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{20}\sin 10x+C$$

1.6. Интегрирование некоторых иррациональных выражений

В некоторых случаях интегралы от иррациональных функций удается с помощью подходящей подстановки свести к интегралам от рациональных функций, т.е. рационализировать. Рассмотрим наиболее типичные случаи.

1. Интегралы вида $\int R(x,\sqrt[n]{ax+b})dx,$ где R – рациональная функция, можно вычислить с помощью подстановки $ax+b=t^n$, тогда $x=\frac{1}{a}(t^n-b),\ dx=\frac{n}{a}t^{n-1}dt.$

Таким образом $\int R\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right)dx=\int R_1(t)dt.$

Пример 34. $I=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2x+1}}$.

Будем полагать, что $2x+1=t^3$, тогда $x=\frac{t^3-1}{2}$, $dx=\frac{3}{2}t^2dt.$

Получим $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{2x+1}}=\int\frac{\frac{3}{2}t^2dt}{t}=\frac{3}{2}\int tdt=\frac{3}{2}\cdot\frac{t^2}{2}+C=\frac{3}{4}\sqrt[3]{(2x+1)^2}+C$.

2. Интегралы вида $\int R\left(x,x^{\frac{p_1}{q_1}},x^{\frac{p_2}{q_2}},\ldots,x^{\frac{p_n}{q_n}}\right)dx,$ где R – рациональная функция, p_1, q_1, p_2, q_2,…, p_n, q_n – целые числа, находят с помощью подстановки $x=t^k$, где k – наименьшее общее кратное чисел q_1, q_2,…, q_n.

Тогда $dx = kt^{k-1}dt$.

С помощью этой подстановки искомый интеграл приводим к виду $\int R_1(t)dt.$

Пример 35. $I = \int \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt[3]{x^2}}dx$.

В подынтегральном выражении есть корни второй и третей степени, поэтому:

$$I = \begin{bmatrix} HOK(2;3) = 6 \quad тогда \\ x = t^6, dx = 6t^5dt \end{bmatrix} = \int \frac{t^3 \cdot 6t^5 dt}{t^6 - t^4} = 6\int \frac{t^8 dt}{t^4(t^2-1)} = 6\int \frac{t^4 dt}{t^2 - 1} =$$

$$= 6\int \frac{(t^4-1)+1}{t^2-1}dt = 6\int \frac{t^4-1}{t^2-1}dt + 6\int \frac{dt}{t^2-1} = 6\int \frac{(t^2-1)(t^2+1)}{t^2-1}dt + 6\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| =$$

$$= 6\int (t^2+1)dt + 3\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| = 2t^3 + 6t + 3\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \begin{bmatrix} т.к.\ x = t^6, \\ то \quad t = \sqrt[6]{x} \end{bmatrix} =$$

$$= 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} + 3\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right| + C.$$

3. Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right)dx$ можно вычислить с помощью подстановки: $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где k =НОК(q_1,q_2,…,q_n).

Пример 36. $I = \int \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} \cdot \frac{dx}{x}$.

Положим $\frac{2-x}{2+x} = t^2$. Отсюда $2 - x = t^2(2+x)$, т.е. $x = \frac{2(1-t^2)}{t^2+1}$,

$$dx = 2\frac{(1-t^2)'(1+t^2) - (1+t^2)'(1-t^2)}{(1+t^2)^2}dt = 2\frac{-2t(1+t^2) - 2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}dt =$$

$$= \frac{2(-2t)(1+t^2+1-t^2)}{(1+t^2)^2}dt = \frac{-8tdt}{(1+t^2)^2}.$$

Тогда

$$J=\int t\cdot\frac{(-8t)(1+t^2)dt}{(1+t^2)^2\,2(1-t^2)}=-4\int\frac{t^2dt}{(1+t^2)(1-t^2)}=4\int\frac{t^2dt}{(t^2+1)(t^2-1)}=$$

$$=4\int\frac{(t^2-1)+1}{(t^2+1)(t^2-1)}dt=4\left(\int\frac{dt}{t^2+1}+\int\frac{dt}{(t^2+1)(t^2-1)}\right)=$$

$$=4\left(arctgt+\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt\right)=4arctgt+2\int\frac{dt}{t^2-1}-2\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=4arctg\,t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-2arctg\,t+C=2arctg\,t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=$$

$$=\left[т.к.\,\frac{2-x}{2+x}=t^2,\,то\;t=\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\right]=2arctg\,\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}+\ln\left|\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}}\right|+C\,.$$

Самопроверка

Авторы пособия выражают уверенность, что вы поняли предлагаемый нами метод самостоятельного получения знаний: изучать материал небольшими порциями и постоянно контролировать уровень вашего усвоения. Рассмотрев интегрирование некоторых тригонометрических и иррациональных выражений, вам вновь следует повторить теоретический материал в учебнике Шипачева В.С «Высшая математика», глава 7, параграф 6, и самостоятельно решить задачи из «Задачника по высшей математике» Шипачева В.С., глава 6, №172, 173, 176, 178, 184, 188, 194, 196, 222. Затем решите предлагаемые вам примеры и оцените степень вашего усвоения изученного материала. Это поможет вам при решении примеров №5,7 из контрольной работы №3.

Примеры для самопроверки приведены в таблице 4.

Таблица 4

Примеры для самопроверки

№	Вычислите интегралы	Ответы	Баллы
1	$\int \frac{\sin x dx}{3+\cos x}$	$-\ln\mid 3+\cos x\mid +C$	2
2	$\int \frac{dx}{\sin x-\cos x}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left\lvert\frac{tg\frac{x}{2}+1-\sqrt{2}}{tg\frac{x}{2}+1+\sqrt{2}}+C\right\rvert$	5
3	$\int \sin^3 xdx$	$-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$	3
4	$\int \cos^2 xdx$	$\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C$	3
5	$\int \sin 3x\cos 4xdx$	$-\frac{1}{14}\cos 7x+\frac{1}{2}\cos x+C$	3
6	$\int \frac{\sqrt{x+2}}{3+\sqrt{x+2}}dx$	$x+2-6\sqrt{x+2}+18\ln\mid\sqrt{x+2}+3\mid +C$	4

Подведем итоги:

а) Если вы набрали от 0 до 10 баллов, то вам следует еще раз повторить теоретический материал и прорешать дополнительные примеры в «Задачнике по высшей математике» Шипачева В. С., глава 6, № 174, 177, 179, 185, 189, 194, 197.

б) Если вы набрали от 11 до 16 баллов, приступайте к решению задач №5,7 из контрольной работы №3. Хотя при решении указанных задач вы, наверное, будете испытывать небольшие затруднения.

в) Если вы набрали от 17 до 20 баллов, то тема «Интегрирование тригонометрических и иррациональных выражений» вами успешно усвоена.

ГЛАВА II. Определенный интеграл

2.1. Понятие и свойства определенного интеграла

Понятие определённого интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ $(a < b)$. Разобьём отрезок $[a,b]$ на n произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

В каждом из полученных частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ произвольным образом выберем точку c_i $(x_{i-1} \le c_i \le x_i)$. Обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и назовём длиной частичного отрезка $[x_{i-1}, x_i]$.

Определение 4. Сумму вида

$$\mathrm{S_n} = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \quad (4)$$

назовём интегральной суммой для функции $f(x)$ на $[a,b]$.

Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка разбиения:

$$\lambda = \max_{1 \le i \le n}\{\Delta x_i\}$$

Определение 5. Если существует конечный предел интегральной суммы (4) при $\lambda \to 0$, то этот предел называется определённым интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ и обозначается

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad (5)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \quad (6)$$

Здесь x – переменная интегрирования, $f(x)$ – подынтегральная функция, a,b – нижний и верхний пределы интегрирования. В этом случае функция называется интегрируемой на отрезке.

Если нижний предел интегрирования больше или равен верхнего предела, то используется следующее определение.

Определение 6.

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Теорема 4. (Теорема существования определенного интеграла)

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то предел (6) существует и не зависит от способа разбиения отрезка $[a,b]$ и от выбора точек c_i.

Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ при любых *a, b, c*.

4. $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$.

5. $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

6. Если $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

7. Если $f(x) \leq g(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

8. Если *M* – наибольшее, а *m* – наименьшее значения функции *f(x)* на $[a,b]$, то

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M\left(b-a\right).$$

9. $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ для некоторой точки $c\in\left[a,b\right]$ (теорема о среднем).

Формула Ньютона – Лейбница

Вычисление интеграла с помощью определения сопряжено с большими трудностями. Поэтому существует более удобным метод вычисления определенных интегралов, связанный с первообразной подынтегральной функции.

<u>Теорема 5.</u>

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $\left[a,b\right]$. Тогда, если функция *F(x)* является некоторой первообразной $f(x)$ на этом отрезке, то справедлива формула:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \qquad (7a)$$

Эта формула называется формулой Ньютона-Лейбница.

Разность $F(b)-F(a)$ условно обозначают $F(x)\Big|_a^b$ или $\left[F(x)\right]_a^b$. Тогда формула Ньютона-Лейбница примет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b \qquad (7b)$$

При интегрировании четных и нечетных функций в симметричных пределах интегрирования можно использовать формулу:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx, \textit{ если } f(x) - \textit{четная функция}, \\ 0, \qquad \textit{если } f(x) - \textit{нечетная функция}. \end{cases}$$

<u>Пример 36.</u> $I = \int_0^2 (4x^3 + 1)dx$.

$$\int_0^2 (4x^3 + 1)dx = 4\int_0^2 x^3 dx + \int_0^2 dx = 4 \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 + x\Big|_0^2 = x^4\Big|_0^2 + x\Big|_0^2 =$$

$$= (2^4 - 0) + (2 - 0) = 16 + 2 = 18$$

2.2. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле

Замена переменной в определенном интеграле

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда, если:

1) функция $x = \varphi(t)$ – дифференцируема на $[\alpha, \beta]$ и $\varphi'(t)$ – непрерывна на $[\alpha, \beta]$;
2) множеством значении функции $x = \varphi(t)$ является отрезок $[a, b]$;
3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;

то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (8)$$

Формула (8) называется формулой замены переменной или подстановки в определенном интеграле.

Следует заметить, что

1) Функцию $x = \varphi(t)$ нужно подбирать таким образом, чтобы интеграл, стоящий в правой части формулы (8), был проще искомого интеграла.
2) Новые пределы интегрирования следует находить с помощью соотношений $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.
3) При вычислении определенного интеграла методом

подстановки не нужно возвращаться к старой переменной

Пример 37. $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{3+2\cos x}$.

Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой $tg\frac{x}{2}=t$, тогда

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\quad x_1=0\ t_1=tg\ 0=0\quad x_2=\frac{\pi}{2}\quad t_2=tg\frac{\pi}{4}=1.$$

Тогда

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{3+2\cos x}=\int\limits_0^1\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\limits_0^1\frac{2dt}{(1+t^2)\frac{(3+3t^2+2-2t^2)}{1+t^2}}=\int\limits_0^1\frac{2dt}{t^2+5}=2\int\limits_0^1\frac{dt}{t^2+5}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{5}}arctg\frac{t}{\sqrt{5}}\bigg|_0^1=\frac{2}{\sqrt{5}}arctg\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Пример 38. $I=\int\limits_2^3 x(3-x)^5\,dx$.

Положим $3-x=t$, тогда $x=3-t$, а $dx=-dt$. Найдём пределы интегрирования: при $x_1=2$ $t_1=3-2=1$, при $x_2=3$ $t_2=3-3=0$. Таким образом:

$$\int\limits_2^3 x(3-x)^5dx=\int\limits_1^0(3-t)t^5(-dt)=-\int\limits_1^0(3t^5-t^6)dt=(-3\cdot\frac{t^6}{6}+\frac{t^7}{7})\bigg|_1^0=$$

$$=(-\frac{t^6}{2}+\frac{t^7}{7})\bigg|_1^0=0+\frac{1}{2}-\frac{1}{7}=\frac{7-2}{14}=\frac{5}{14}$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a,b]$, то справедлива формула:

$$\int_a^b u(x)dv = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du \qquad (9)$$

Формула (9) называется формулой интегрирования по частям в определённом интеграле.

Пример 39. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$.

Воспользуемся формулой (9). Положим $u = x$, $dv = \cos x dx$. Тогда, $du = dx,\quad v = \int \cos x\,dx = \sin x.$ Применяя формулу (9), будем иметь:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0\cdot\sin 0 + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot 1 - 0 + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

2.3. Некоторые геометрические приложения определенного интеграла

Вычисление площадей плоских фигур

1. Фигура, ограниченная графиком функции, непрерывной на отрезке $[a,b]$ ($f(x) \ge 0$, $a < b$), прямыми $x = a$, $x = b$, отрезком $[a,b]$ оси OX, называется криволинейной трапецией (рис. 1).

Площадь S криволинейной трапеции вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b f(x)dx \qquad (10)$$

2. Если $f(x)<0$, $x\in[a,b]$ и $a<b$ (рис. 2), то

$$S=-\int_a^b f(x)dx. \quad (11)$$

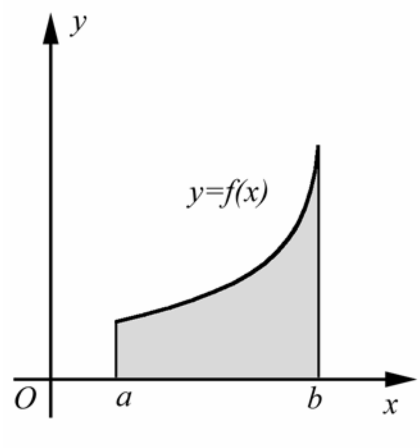

Рисунок 1

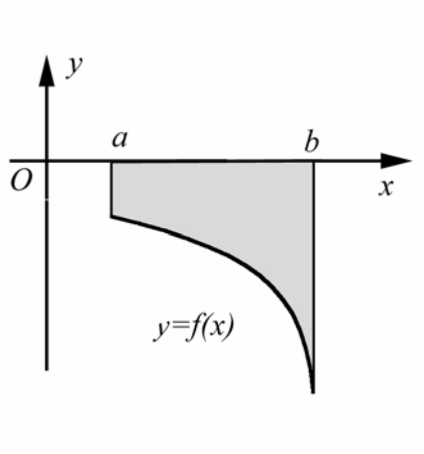

Рисунок 2

3. Пусть на отрезке $[a,b]$ ($a<b$) заданы две непрерывные функции: $y_1=f_1(x)$ и $y_2=f_2(x)$, причем при всех значениях x из этого отрезка $y_1 \le y_2$. Тогда площадь фигуры, ограниченной графиками этих функций и прямыми $x=a$, $x=b$ (рис. 3), вычисляется по формуле:

$$S=\int_a^b \left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx \qquad (12)$$

4. Пусть криволинейная трапеция ограничена графиком непрерывной на $\left[c,d\right]$ ($c<d$) функции $x=\varphi(y)$, $\varphi(y)\ge 0$, прямыми $y=c$, $y=d$ и отрезком $\left[c,d\right]$ оси OY (рис. 4), тогда площадь такой фигуры будет вычисляться по формуле:

$$S=\int_c^d \varphi(y)dy \qquad (13)$$

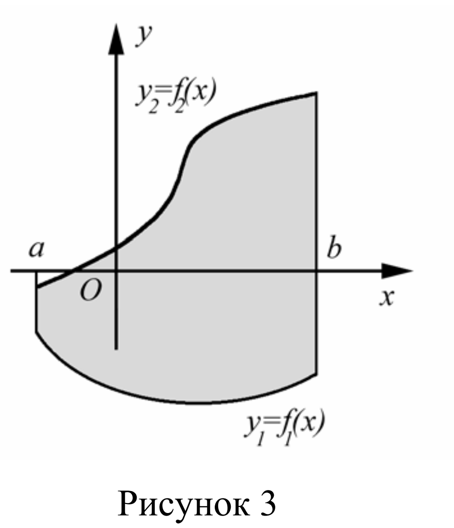

Рисунок 3

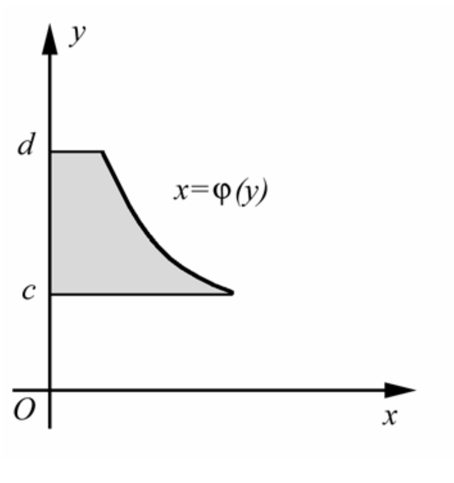

Рисунок 4

5. Если криволинейная трапеция ограничена кривой, заданной параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t),\ y(t) \ge 0,\ t \in [t_1, t_2], \end{cases}$, прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ и отрезком $[a,b]$ оси OX и выполняются условия замены переменной в определенном интеграле, то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt\,, \qquad (14)$$

причем $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$.

6. Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ и двумя лучами φ=α, φ= β (α<β, причем $\rho(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$) (рис. 5), вычисляется по формуле:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi\,. \quad (15)$$

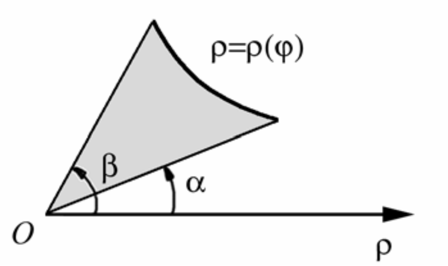

Рисунок 5

<u>**Пример 40.**</u> Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 2x + 3$, $y = x^2$.

Построим фигуру, ограниченную данными линиями (рис. 6).

Найдем абсциссы точек пересечения графиков:

$$x^2 = 2x + 3;\ x^2 - 2x - 3 = 0;\ x = -1,\ x = 3.$$

Согласно формуле (12) имеем:

$$S = \int_{-1}^{3}(2x + 3 - x^2)dx = \left(x^2 + 3x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-1}^{3} = 9 - 1 + 9 + 3 - 9 - \frac{1}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

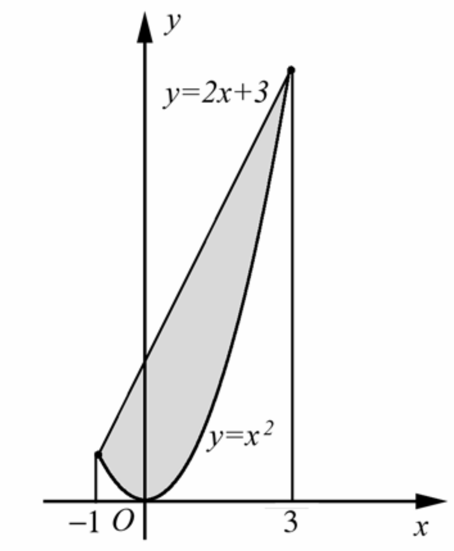

Рисунок 6

Пример 41. Найдите площадь области, ограниченной одной петлей кривой $\rho = a\sin 2\varphi$.

Выполним построение области (рис. 7). Изменяя полярный угол φ от нуля до $\frac{\pi}{2}$, получим одну петлю кривой; вторую петлю кривой можно получить симметрично отображая первую петлю относительно полюса O.

Таблица 5

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	a	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	0

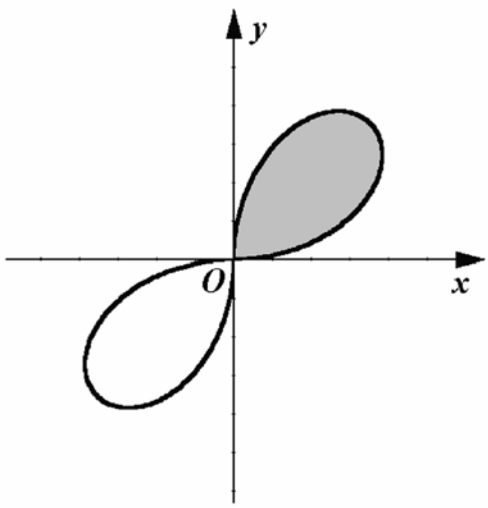

Рисунок 7

Площадь выделенной области вычислим с использованием формулы (15).

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin 2\varphi)^2\,d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\varphi d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}\,d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4\varphi d\varphi\right)=\frac{1}{4}a^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{4}a^2\cdot\frac{1}{4}\sin 4\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{8}$$

<u>Пример 42.</u> Найдите площадь фигуры, ограниченной астроидой

$$\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}.$$

Выполним построение области. Изменяя t от 0 до π, получим половину кривой. Вторую часть построим, симметрично отображая построенную часть относительно точки $O(0.0)$.

Таблица 6

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
x	a	$\frac{3\sqrt{3}}{8}a$	$\frac{\sqrt{2}}{4}a$	$\frac{1}{8}a$	0	$-\frac{1}{8}a$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}a$	$-\frac{3\sqrt{3}}{8}a$	$-a$
y	0	$\frac{1}{8}a$	$\frac{\sqrt{2}}{4}a$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}a$	a	$\frac{3\sqrt{3}}{8}a$	$\frac{\sqrt{2}}{4}a$	$\frac{1}{8}a$	0

Площадь данной области вычислим с использованием формулы (14).

$$S=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}a\sin^3 t(a\cos^3 t)'\,dt=-12a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^4 t\cos^2 tdt=-3a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 2t\sin^2 tdt=$$

$$=-3a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1-\cos 4t}{2}\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt=\frac{3a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t-\cos 4t\cos 2t)dt=$$

$$= \frac{3a^2}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t \cos 4t dt \right) = \frac{3a^2}{4} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2\pi}{8}$$

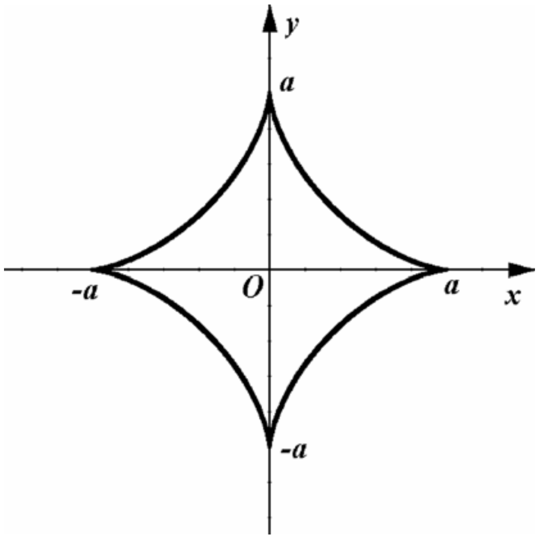

Рисунок 8

Вычисление длины дуги кривой

<u>Определение 7.</u> Длиной дуги $M_0 M_n$ называется предел, к которому стремится длина вписанной ломанной $M_0 M_1 M_2 ... M_n$, когда длина ее наибольшего звена стремится к нулю:

$$l = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \text{ , (рис. 9)}$$

где l_i – длина отрезка $M_{i-1} M_i$.

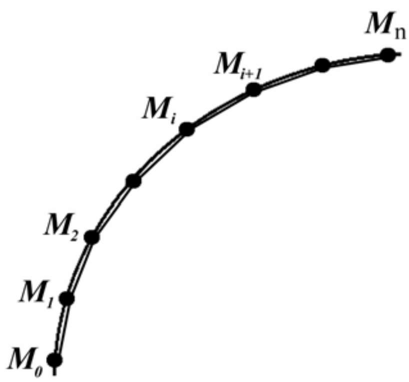

Рисунок 9

1. Длина дуги кривой в прямоугольных координатах.

Пусть дана кривая с уравнением $y = f(x)$, причем функция $y = f(x)$ и ее производная $f'(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$. Тогда длина дуги этой кривой, заключенной между вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$, вычисляется по формуле:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx \quad (16)$$

Пусть уравнение кривой задано в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

где $\alpha \le t \le \beta$, причем $x(t)$, $y(t)$, $x'(t)$, $y'(t)$ – непрерывные функции на заданном промежутке. Тогда длина дуги вычисляется по формуле:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt \qquad (17)$$

2. Длина дуги кривой в полярных координатах.

Пусть дана кривая с уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, где ρ – полярный радиус, φ – полярный угол, причем $\rho(\varphi)$ и $\rho'(\varphi)$ непрерывны на отрезке $[\varphi_1, \varphi_2]$. Тогда длина дуги кривой, заключенной между φ_1 и φ_2, вычисляется по формуле:

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left(\rho(\varphi)\right)^2 + \left(\rho'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi \quad (18)$$

Пример 43. Найдите длину дуги кривой $y = 1 - \ln\cos x$ в пределах от $x = 0$ до $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Кривая задана в прямоугольных координатах. В этом случае для отыскания длины дуги воспользуемся формулой (16).

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \left((1 - \ln\cos x)'\right)^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + tg^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x} =$$

$$=\left[tg\frac{x}{2}=t \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}\right]=$$

$$=2\int_{t_1}^{t_2}\frac{dt}{1-t^2}=-2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg\|_{t_1}^{t_2}=\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\Bigg\|_{t_1}^{t_2}=\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+1}{tg\frac{x}{2}-1}\right|\Bigg\|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\ln\left|\frac{tg\frac{\pi}{8}+1}{tg\frac{\pi}{8}-1}\right|$$

__Пример 44.__ Найти длину одной арки циклоиды

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}.$$

Если функция задана параметрически, то ее график строится в декартовой системе координат. Выполним ее построение. Одна арка циклоиды получается при изменении *t* от 0 до 2π .

Таблица 7

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
x	0	0,02a	0,07a	0,18a	0,57a	1,23a	1,66a	2,12a	3,14a	4,63a	5,71a	6,20a	6,28a
y	0	0,13a	0,3a	0,5a	a	1,5a	1,7a	1,85a	2a	1,7a	a	0,3a	0

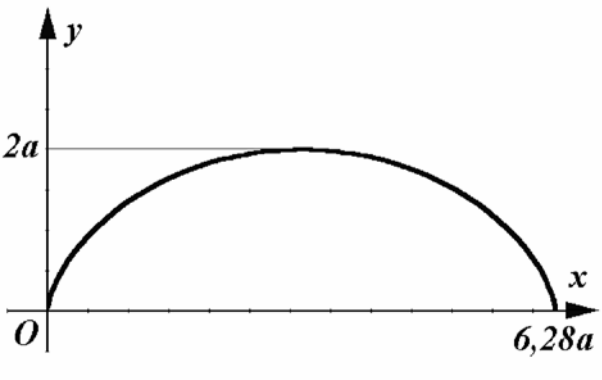

Рисунок 10

Уравнение кривой задано в параметрической форме. В этом случае длина дуги кривой будет вычисляться по формуле (17).

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(a(t-\sin t)'\right)^2+\left(a(1-\cos t)'\right)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt=a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}\,dt=a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=-4a\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=-4a(\cos\pi-\cos 0)=8a$$

Пример 45. Найти длину кардиоиды $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

Выполним построение кривой в полярной системе координат (рис. 11). Значения рассчитаны в таблице 8.

Таблица 8

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
ρ	$2a$	$1{,}85a$	$1{,}7a$	$1{,}5a$	a	$0{,}3a$	0	$0{,}3a$	a	$1{,}7a$	$2a$

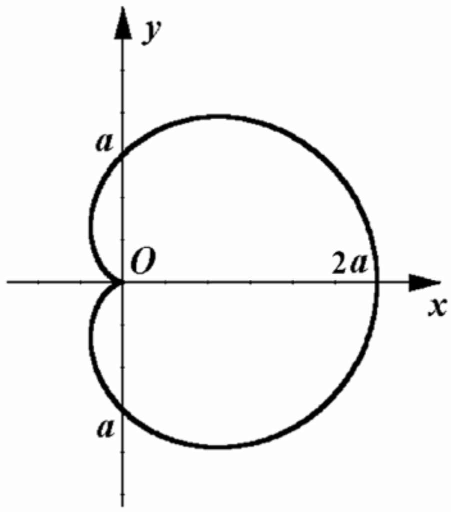

Рисунок 11

Уравнение кривой задано в полярных координатах. В этом случае длина дуги кривой вычисляется по формуле (18).

$$l=2\int_0^{\pi}\sqrt{\left(a(1+\cos\varphi)'\right)^2+\left(a(1+\cos\varphi)\right)^2}\,d\varphi=2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2\sin^2\varphi+a^2(1+\cos\varphi)^2}\,d\varphi=$$

$$= 2a\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\varphi)}d\varphi = 2a\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi = 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a$$

Самопроверка

После изучения определенного интеграла и его приложений авторы предлагают вам вновь проверить степень усвоения материала для успешного выполнения задач № 8-10, 13, 14 контрольной работы №3.

Примеры для самопроверки приведены в таблице 9.

Таблица 9

Примеры для самопроверки

№	***Решите задачи***	***Ответы***	Баллы
1	Вычислите интеграл $\int_5^{13}\sqrt{2x-1}dx$	$\frac{98}{3}$	1
2	Вычислите интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\sin x dx$	1	2
3	Вычислите интеграл $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$	$\sqrt{2}-1$	2
4	Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y^2 = 2x+1$ и $x-y-1=0$	$\frac{16}{3}$	3
5	Найдите площадь фигуры, ограниченной кривой $r = 2\cdot\cos 3\varphi$	π	4
6	Найдите длину дуги кривой $y = \frac{1}{3}\cdot(3-x)\cdot\sqrt{x}$ между точками $x=0$ и $x=3$.	$2\cdot\sqrt{3}$	3

Максимальное число баллов, которое можно набрать – 15. Если Вы набрали менее 7 баллов, то вам необходимо ещё раз обратиться к рассматриваемому учебному материалу. В качестве помощника можно использовать лекции, предлагаемое учебно-методическое пособие или учебник В. С. Шипачёва «Высшая математика» (глава 8, параграфы 1, 4, 7, 8, 9, 10). Если вы набрали от 8 до 12 баллов, то вам можно приступать к решению задач контрольной работы, однако, возможно, выполнение некоторых задач вызовет у вас трудности. Если Вами набрано от 13 до 15 баллов, то авторы вас поздравляют с успешным усвоением темы по определенному интегралу и его приложениям; выполнение задач контрольной работы не вызовет у вас особых трудностей.

ГЛАВА III. Несобственный интеграл

3.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами (I рода)

<u>Определение 8.</u> Пусть функция $f(x)$ определена на бесконечном промежутке $[a,+\infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[a,R]$, то есть существует определенный интеграл $\int\limits_a^R f(x)dx$ для всех $R>a$. Тогда, если существует предел

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_a^R f(x)dx, \quad (19)$$

то его называют несобственным интегралом I рода и обозначают

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx. \quad (20)$$

Таким образом, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{R\to+\infty}\int\limits_a^R f(x)dx$.

Если предел (19) существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл I рода сходится. Если предел (19) не существует или бесконечен, то несобственный интеграл I рода называется расходящимся.

Аналогично интегралу (20) можно ввести несобственный интеграл по промежутку $(-\infty,b]$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{R\to-\infty}\int\limits_R^b f(x)dx \quad (21)$$

А также несобственный интеграл по промежутку $(-\infty,+\infty)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$

где c — любое число, при условии, что оба интеграла справа существуют. (Исключая тот случай, когда эти интегралы равны бесконечности разных знаков).

Пример 46. Исследовать сходимость $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$, где $\alpha\in R$.

Рассмотрим два случая.

1) Если $\alpha=1$, то

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{R\to+\infty}\int\limits_1^{R}\frac{dx}{x}=\lim_{R\to+\infty}\ln x\Big|_1^R=\lim_{R\to+\infty}(\ln R-\ln 1)=+\infty.$$

То есть интеграл расходится.

2) Если $\alpha\neq1$, то

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{R\to+\infty}\int\limits_1^{R}x^{-\alpha}dx=\lim_{R\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^R=\lim_{R\to+\infty}\left(\frac{R^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\right)=$$

$$=\lim_{R\to+\infty}\left(\frac{R^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}\right)=\begin{cases}\dfrac{-1}{1-\alpha}, \text{если } \alpha>1\\ \infty, \quad \text{если } \alpha<1\end{cases}$$

Таким образом, данный интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\begin{cases}\text{сходится при } \alpha>1\\ \text{расходится при } \alpha\leq1\end{cases}.$$

Пример 47. Исследовать сходимость несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{0}\cos 2xdx$.

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\cos 2xdx=\lim_{R\to-\infty}\int\limits_R^{0}\cos 2xdx=\lim_{R\to-\infty}\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_R^0=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{R\to-\infty}(\sin 0-\sin 2R)=-\frac{1}{2}\lim_{R\to-\infty}\sin 2R$$

Интеграл расходится, так как данного предела не существует.

Пример 48. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}.$$

Подынтегральная функция определена и непрерывна на всей числовой оси. Воспользуемся определением несобственного интеграла (21).

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{R_1\to-\infty}\int_{R_1}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{R_2\to+\infty}\int_{0}^{R_2}\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\lim_{R_1\to-\infty} arctgx\Big|_{R_1}^{0}+\lim_{R_2\to+\infty} arctgx\Big|_{0}^{R_2}=\lim_{R_1\to-\infty}(-arctgR_1)+\lim_{R_2\to+\infty} arctgR_2=$$

$$=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi$$

Таким образом, данный интеграл сходится и равен π.

Отметим несколько свойств несобственных интегралов I рода.

1) Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то для всякого $b \geq a$ интеграл $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ сходится и $\int_a^{+\infty} f(x)dx=\int_a^{b} f(x)dx+\int_b^{+\infty} f(x)$.

2) Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится интеграл $\int_a^{+\infty} kf(x)dx$ и имеет место равенство $\int_a^{+\infty} kf(x)dx=k\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

3) Если интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходятся, то сходятся и интегралы $\int_a^{+\infty}\big(f(x)\pm g(x)\big)dx$ и имеет место равенство

$$\int_a^{+\infty}\big(f(x)\pm g(x)\big)dx=\int_a^{+\infty} f(x)dx\pm\int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

Для других типов несобственных интегралов I рода свойства аналогичны. Однако сходимость не всех несобственных интегралов I рода можно легко выяснить по определению. Поэтому для выяснения сходимости несобственных интегралов часто используют так называемые признаки сходимости.

1) Если на промежутке $[a,+\infty)$ непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$

удовлетворяют условию $0 \le f(x) \le g(x)$, то из сходимости $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ (признак сравнения).

2) Если при $x \in [a,+\infty)$ $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k \ne 0$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся (предельный признак сравнения).

3) Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, который в этом случае называется абсолютно сходящимся.

Пример 49. Исследовать на сходимость $\int_1^{+\infty} \dfrac{x+3}{\sqrt[5]{x^2}} dx$.

$\dfrac{x+3}{\sqrt[5]{x^2}} > 0$ для любого $x \in [1,+\infty)$, причем

$$f(x) = \frac{x+3}{x^{2/5}} = x^{3/5} + \frac{3}{x^{2/5}} > \frac{1}{x^{2/5}} = \varphi(x).$$

Так как $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{2/5}}$ расходится (см. пример 46), то согласно признаку сравнения $\int_1^{+\infty} \dfrac{x+3}{\sqrt[5]{x^2}} dx$ расходится.

Пример 50. Исследовать на сходимость $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{5x^4 + 6x + 12}$.

Функция $f(x) = \dfrac{1}{5x^4 + 6x + 12} > 0$ для любого $x \in [1,+\infty)$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^4}$, интеграл от которой $\int_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^4}$ сходится (см. пример 46).

Вычислим $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4}{5x^4+6x+12}=\dfrac{1}{5}\neq 0$. Тогда согласно предельному признаку сравнения, так как $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^4}$ сходится, то сходится и исходный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{5x^4+6x+12}$.

Пример 51. Исследовать на сходимость $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^2}dx$.

Рассмотрим интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{|\cos x|}{x^2}dx$. Функция $f(x)=\dfrac{|\cos x|}{x^2}\geq 0$ для всех $x\in[1,+\infty)$. Рассмотрим функцию $\varphi(x)=\dfrac{1}{x^2}$, интеграл от которой $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2}$ сходится (см. пример 46). Так как $\dfrac{|\cos x|}{x^2}\leq\dfrac{1}{x^2}$, то согласно признаку сравнения $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{|\cos x|}{x^2}dx$ сходится, а исходный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^2}dx$ будет абсолютно сходящимся.

3.2. Несобственные интегралы от неограниченных функций (II рода)

Определение 9. Пусть функция $f(x)$ задана на полусегменте $[a,b)$ и $\lim\limits_{x\to b}f(x)=\infty$. Пусть для всякого $0<\delta<b-a$ существует $\int\limits_a^{b-\delta}f(x)dx$. Если существует предел $\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_a^{b-\delta}f(x)dx$, то он называется несобственным интегралом II рода (интегралом от неограниченной функции) и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$. Таким образом $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_a^{b-\delta}f(x)dx$. Если этот предел

существует и конечен, то несобственный интеграл II рода называется сходящимся, если же он не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл II рода называется расходящимся.

Аналогично определяются несобственные интегралы II рода в случаях, если функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв в точке $x = a$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx .$$

Если функция $f(x)$ терпит разрыв II рода во внутренней точке $c \in [a, b]$, то несобственный интеграл II рода определяется следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

В этом случае интеграл называется сходящимся, если оба несобственных интеграла, стоящих справа, сходятся.

<u>Пример 52.</u> Рассмотрим $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$.

1) Пусть $\alpha = 1$. Тогда $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \ln x \Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0} (\ln 1 - \ln \varepsilon) = \infty$.

Таким образом, при $\alpha = 1$ рассматриваемый интеграл расходится.

2) Пусть $\alpha \neq 1$, $\alpha > 0$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 x^{-\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(1 - \varepsilon^{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & 0 < \alpha < 1 \\ \infty, & \alpha > 1 \end{cases}$$

Итак $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \text{сходится при } 0 < \alpha < 1 \\ \text{расходится при } \alpha \geq 1 \end{cases}$ (22)

Можно показать, что несобственный интеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} \text{сходится при } 0 < \alpha < 1 \\ \text{расходится при } \alpha \geq 1 \end{cases} \qquad (23)$$

Это же относится и к несобственному интегралу

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}} = \begin{cases} \text{сходится при } 0<\alpha<1 \\ \text{расходится при } \alpha \geq 1 \end{cases} \qquad (24)$$

<u>Пример 53.</u> Исследовать сходимость несобственного интеграла $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Подынтегральная функция $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ терпит разрыв второго рода в точке $x=2$, $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}=\infty$. Тогда

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\delta\to 0}\int_0^{2-\delta}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\delta\to 0}\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^{2-\delta} = \lim_{\delta\to 0}\left(\arcsin\frac{2-\delta}{2}-0\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Интеграл сходится и его величина составляет $\frac{\pi}{2}$.

Отметим признаки сходимости несобственных интегралов II рода.

1) Если на промежутке $[a,b)$ функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, при $x=b$ терпят разрыв II рода и удовлетворяют условию $0\leq f(x)\leq g(x)$, то из сходимости $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость $\int_a^b f(x)dx$, а из расходимости $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b g(x)dx$. (Признак сравнения.)

2) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на промежутке $[a,b)$ и в точке $x=b$ терпят разрыв II рода. Если существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k$, причем $0<k<\infty$, то интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно. (Предельный признак сравнения.)

3) Если функция $f(x)$, знакопеременная и непрерывная на $[a,b)$, в точке $x=b$ имеет разрыв II рода, и несобственный интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$

сходится, то сходится и интеграл $\int_a^b f(x)dx$, который в этом случае называется абсолютно сходящимся. В качестве эталонов для сравнения применяют интегралы (22)-(24).

<u>Пример 54.</u> Исследовать сходимость несобственного интеграла $\int_0^4 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{4-x}} dx$.

Функция $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sqrt{4-x}}$ терпит разрыв II рода в точке $x = 4$. Сравним ее с функцией $g(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$. Как известно $\int_0^4 \frac{dx}{(4-x)^{1/2}}$ сходится (так как $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, см. (23)). Так как $\frac{\cos^2 x}{\sqrt{4-x}} \leq \frac{1}{\sqrt{4-x}}$, то согласно признаку сравнения $\int_0^4 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{4-x}} dx$ сходится.

Самопроверка

Изучив последнюю, предлагаемую в этом пособии тему «Несобственный интеграл», авторы рекомендуют вам вновь обратиться к задачам для самоконтроля.

Примеры для самопроверки приведены в таблице 10.

Таблица 10

Примеры для самопроверки

№ п/п	Решите задачи	Ответ	Баллы
1	Вычислите интеграл и выясните, сходится он или расходится: $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$	∞, интеграл расходится	2
2	Вычислите интеграл и выясните, сходится он или расходится: $\int\limits_0^{+\infty} 2^{-x} dx$	$\frac{1}{\ln 2}$, интеграл сходится	2
3	Вычислите и выясните характер сходимости интеграла: $\int\limits_0^{a} \frac{a^2 \cdot dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\frac{\pi \cdot a^2}{2}$, интеграл сходится	3
4	Вычислите и выясните характер сходимости интеграла $\int\limits_0^{1} \ln x \cdot dx$	-1, интеграл сходится	3

Максимальное количество баллов, которое вы можете набрать – 10. Если вы набрали от 0 до 4 баллов, то вам необходимо ещё раз обратиться к учебному материалу по данной теме. При рассмотрении раздела «Несобственный интеграл» авторы рекомендуют вам использовать данное методическое пособие, лекции, а также учебник В. С. Шипачёва «Высшая математика» (глава 8, параграф 11). Если вы набрали от 5 до 7 баллов, то можете приступать к выполнению задач №11-12 контрольной работы, однако у вас могут возникнуть вопросы при их выполнении. Если вы набрали от 8 до 10 баллов, то авторы выражают уверенность в том, что выполнение задач контрольной работы по данной теме не вызовет у вас трудностей.

ГЛАВА IV. Тестовые задания и дополнительные задачи

4.1. Тестовые задания

Проверьте качество изучаемой темы «Интегральное исчисление функций одной переменной» с помощью тестовых заданий. Выберите один правильный ответ.

1. Первообразной функции $f(x)$ называется
   1) совокупность функций $F(x)$;
   2) функция $F(x)$, для которой выполняется равенство $F'(x) = f(x)$;
   3) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
2. Неопределенный интеграл от функции $f(x)$ – это
   1) совокупность всех первообразных функций $F(x) + C$;
   2) предел интегральной суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$;
   3) функция $F(x)$.
3. Дифференциал от неопределенного интеграла $d\int f(x)dx$ равен
   1) первообразной $F(x)$;
   2) подынтегральной функции $f(x)$;
   3) подынтегральному выражению $f(x)dx$.
4. Можно ли выносить постоянный множитель за знак неопределенного интеграла?
   1) можно;
   2) нельзя;
   3) иногда можно.

5. Выберите правильную формулу для вычисления неопределенного интеграла от суммы функций $\int (f(x)+g(x))dx$:

   1) $\int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$;

   2) $\int f(x)dx - \int g(x)dx$;

   3) $\int f(x)dx + \int g(x)dx$.

6. Если $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$, то $\int f(ax+b)dx$ равен

   1) $\frac{1}{a}F(ax+b)+C$;

   2) $aF(ax+b)+C$;

   3) $F(ax+b)+C$.

7. Формула интегрирования по частям имеет вид:

   1) $\int udv = uv - \int vdu$;

   2) $\int udv = uv + \int vdu$;

   3) $\int udv = uv$.

8. Если неопределенный интеграл содержит радикал $\sqrt{a^2-x^2}$, то обычно полагают:

   1) $x = \frac{a}{\sin t}$;

   2) $x = atgt$;

   3) $x = a\sin t$.

9. Если неопределенный интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2-a^2}$, то обычно полагают:

   1) $x = \frac{a}{\sin t}$;

   2) $x = atgt$;

   3) $x = a\sin t$.

10. Если неопределенный интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2+a^2}$, то обычно полагают:

1) $x = \dfrac{a}{\cos t}$;

2) $x = atgt$;

3) $x = a\cos t$.

11. Неопределенный интеграл вида $\int \dfrac{dx}{x^2+px+q}$ ($D<0$) вычисляется:

1) разложением квадратного трехчлена на множители;
2) выделением полного квадрата;
3) по частям.

12. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$ можно вычислить при помощи подстановки:

1) $\sin x = t$;

2) $tg\dfrac{x}{2} = t$;

3) $\cos x = t$.

13. Определенный интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ есть:

1) предел интегральной суммы $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$;

2) первообразная $F(x)$;

3) совокупность первообразных.

14. Формула Ньютона-Лейбница имеет вид:

1) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(a)+F(b)$;

2) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(a)-F(b)$;

3) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

15. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле имеет вид:

1) $\int_a^b udv = uv - \int_a^b vdu$;

2) $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$;

3) $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b + \int_a^b vdu$.

16. Площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$, $x = b$ ($a < b$) и осью ox, вычисляется по формуле:

1) $S = \int_a^b f(x)dx$;

2) $S = \int_b^a f(x)dx$;

3) $S = \int_b^b f(x)dx$.

17. Площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ ($f_1(x) \ge f_2(x)$) и прямыми $x = a$, $x = b$ ($a < b$) вычисляется по формуле:

1) $S = \int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx$;

2) $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$;

3) $S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx$.

18. Если криволинейная трапеция ограничена кривой, заданной уравнениями в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$, прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ и отрезком оси ox, то ее площадь можно вычислить по формуле:

1) $\int\limits_a^b y(t)x'(t)dt$;

2) $\int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$, где $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$.

3) $\int y(t)x(t)dt$.

19. Подберите формулу для вычисления площади криволинейного сектора:

1) $S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi$;

2) $S = \int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi$;

3) $S = \int\limits_\alpha^\beta \rho(\varphi)d\varphi$.

20. Длина дуги гладкой кривой $y = f(x)$, содержащейся между двумя точками с абсциссами $x = a$, $x = b$, равна:

1) $L = \int\limits_a^b f(x)dx$;

2) $L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx$;

3) $L = \int\limits_a^b (1 + y'^2)dx$.

21. Если кривая задана уравнениями в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$, а t_1 и t_2 – значения параметра, соответствующие концам дуги, то длина дуги кривой равна:

1) $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$;

2) $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + y'^2}dt$;

3) $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + x'^2}dt$.

22. Укажите формулу для вычисления длины дуги, если гладкая кривая задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ в полярных координатах (α, β – значения полярного угла в крайних точках дуги):

1) $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \rho'^2}d\varphi$;

2) $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}d\varphi$;

3) $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}d\rho$.

23. Если функция $y = f(x)$ непрерывна при $a \le x < +\infty$, то полагают:

1) $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$;

2) $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$;

3) $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \int f(x)dx$.

24. Если функция $y = f(x)$ непрерывна при $-\infty < x \le b$, то полагают:

1) $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$;

3) $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{b\to-\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$.

Ответы к заданиям предложены в таблице 11.

Таблица 11

Ответы на тестовые задания

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Номер правильного ответа	2	1	3	1	3	1	1	3	1	2	2	2

Номер задания	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Номер правильного ответа	1	3	2	1	3	2	1	2	1	2	1	2

4.2. Дополнительные задачи

Вычислите неопределенные интегралы (1-20); вычислите определенные интегралы (21-26); найдите площади фигур, ограниченных кривыми (27-29); найдите площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды и осью абсцисс (30); найдите длины дуг кривых (31-33); вычислите несобственные интегралы или установите их расходимость (34-40) (таблица 12).

Таблица 12

Содержание дополнительных задач

Номер	Условие	Ответ
1	$\int \frac{x^2+4}{x}dx$	$\frac{x^2}{2}+4\ln\|x\|+C$
2	$\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx$	$\ln\|x\|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$
3	$\int \frac{3ctg^2x+4}{\cos^2 x}dx$	$-3ctgx+4tgx+C$
4	$\int \sin(2x+3)dx$	$-\frac{1}{2}\cos(2x+3)+C$
5	$\int \frac{1+\ln x}{x}dx$	$\frac{(1+\ln x)^2}{2}+C$
6	$\int \frac{3arctgx-x}{1+x^2}dx$	$\frac{3}{2}arctg^2x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

7	$\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx$	$-\frac{1}{x-\sin x}+C$
8	$\int (4-3x)e^{-3x}dx$	$-\frac{1}{3}(4-3x)e^{-3x}+\frac{1}{3}e^{-3x}+C$
9	$\int (4x+3)\sin 5x dx$	$-\frac{1}{5}(4x+3)\cos 5x+\frac{4}{25}\sin 5x+C$
10	$\int arctg\sqrt{4x-1}dx$	$xarctg\sqrt{4x-1}-\frac{1}{4}\sqrt{4x-1}+C$
11	$\int \ln(x^2+4)dx$	$x\ln(x^2+4)-2x+4arctg\frac{x}{2}+C$
12	$\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$	$-\ln\|x-2\|+\ln\|x-3\|+C$
13	$\int \frac{x^3+1}{x^2-x}dx$	$\frac{x^2}{2}+x-\ln\|x\|+2\ln\|x-1\|+C$
14	$\int \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}dx$	$\ln\frac{x^2}{\|x+1\|}+\frac{6}{x+1}+C$
15	$\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$	$\ln\|x\|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$
16	$\int \cos^2\frac{x}{2}dx$	$\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin x+C$
17	$\int \sin x\cos^5 x dx$	$-\frac{1}{6}\cos^6 x+C$
18	$\int \frac{\cos x dx}{2+\cos x}$	$x-\frac{4}{\sqrt{3}}arctg\frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+C$
19	$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$	$2\sqrt{x}-2arctg\sqrt{x}+C$
20	$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$	$C-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}$
21	$\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^3}$	$\frac{7}{72}$
22	$\int_{0}^{16}\frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$	12
23	$\int_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$	$\frac{\pi}{2}$

24	$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$	$e-\sqrt{e}$
25	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$	$\frac{\pi}{2}-1$
26	$\int_0^{e-1} \ln(x+1)dx$	1
27	$y=(x-1)^2$, $y=x+1$	4,5
28	$y^2=2x$, $2xy=-1$, $x=0$, $y=-2$	$\ln\sqrt{2}+\frac{1}{6}$
29	$\rho=3\sin 2\varphi$	$\frac{9\pi}{4}$
30	$\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$	12π
31	$y=\ln(1-x^2)$, $x_1=0$, $x_2=\frac{1}{2}$	$\ln 3-\frac{1}{2}$
32	$\begin{cases} x=a\cos^3 x \\ y=a\sin^3 x \end{cases}$	$6a$
33	$\rho=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$	$\frac{3}{2}\pi a$
34	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$	2
35	$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$	расходится
36	$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$	расходится
37	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$	расходится
38	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$	1
39	$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$	расходится
40	$\int_0^{+\infty} \frac{arctgx}{1+x^2}dx$	$\frac{\pi^2}{8}$

ГЛАВА V. Содержание контрольной работы № 3

Вариант 3.1

Найдите неопределенные интегралы. В двух первых примерах (1 и 2) проверьте результаты дифференцированием.

1) $\int \frac{xdx}{7+x^2}$; 2) $\int \frac{(x+18)dx}{x^2-4x-12}$;

3) $\int (3-x)\cos x dx$; 4) $\int \frac{dx}{x^3-x^2}$;

5) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[4]{\cos x}}$; 6) $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Вычислите определенные интегралы.

8) $\int_2^7 \frac{\sqrt{x+2}dx}{x}$; 9) $\int_0^1 arctgx dx$; 10) $\int_0^{\pi} \cos 2x \sin 3x dx$.

Вычислите несобственные интегралы или установите их расходимость.

11) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$; 12) $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$.

Найдите площадь области, ограниченной линиями. Сделайте чертеж.

13) $3x^2-4y=0$, $2x-4y+1=0$.

Найдите длину кривой.

14) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Вариант 3.2

Найдите неопределенные интегралы. В двух первых примерах (1 и 2) проверьте результаты дифференцированием.

1) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 \dfrac{x}{5}}$; 2) $\int \dfrac{(x+4)dx}{x^2-2x-8}$;

3) $\int x\ln(1-3x)dx$; 4) $\int \dfrac{dx}{x^4-1}$;

5) $\int \dfrac{\cos x dx}{4+\sin x}$; 6) $\int \dfrac{e^{3x}dx}{1+e^{3x}}$;

7) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}}$.

Вычислите определенные интегралы.

8) $\int\limits_{-\frac{3}{4}}^{0} \dfrac{3xdx}{\sqrt{(x+1)^3}}$; 9) $\int\limits_{0}^{\pi} x\cos 2xdx$; 10) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin 5xdx$.

Вычислите несобственные интегралы или установите их расходимость.

11) $\int\limits_{e}^{+\infty} \dfrac{dx}{x\ln^2 x}$; 12) $\int\limits_{1}^{2} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

Найдите площадь области, ограниченной линиями. Сделайте чертеж.

13) $3x^2+4y=0$, $2x-4y-1=0$.

Найдите длину дуги кривой.

14) $\begin{cases} x = 2(t-\sin t) \\ y = 2(1-\cos t) \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$.

Вариант 3.3

Найдите неопределенные интегралы. В двух первых примерах (1 и 2) проверьте результаты дифференцированием.

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$; 2) $\int \frac{(x+23)dx}{x^2+x-20}$;

3) $\int xe^{-7x}dx$; 4) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+4x+4}$;

5) $\int \frac{\sin^3 xdx}{\cos^2 x}$; 6) $\int \frac{e^{2x}dx}{(1+e^{2x})^3}$;

7) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{3+\sqrt{x+1}}dx$.

Вычислите определенные интегралы.

8) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{4-x}$; 9) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 3xdx$; 10) $\int\limits_0^{\pi} \sin 7x\cos 3xdx$.

Вычислите несобственные интегралы или установите их расходимость.

11) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3dx}{4+x^4}$; 12) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$.

Найдите площадь области, ограниченной линиями. Сделайте чертеж.

13) $2x+3y^2=0$, $2x+2y+1=0$.

Найдите длину дуги кривой.

14) $\begin{cases} x = a(3\cos t - \cos 3t) \\ y = a(3\sin t - \sin 3t) \end{cases}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Вариант 3.4

Найдите неопределенные интегралы. В двух первых примерах (1 и 2) проверьте результаты дифференцированием.

1) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt[3]{1-e^x}}$; 2) $\int \frac{(x+12)dx}{x^2-x-6}$;

3) $\int arctg 4x dx$; 4) $\int \frac{dx}{x^3+1}$;

5) $\int \frac{\sin x dx}{1+\sin x}$; 6) $\int (2+e^x)^7 \cdot e^x dx$;

7) $\int x^9 \cdot \sqrt[3]{1+x^5} dx$.

Вычислите определенные интегралы.

8) $\int\limits_{-8}^{0} \frac{dx}{5-\sqrt[3]{x^2}}$; 9) $\int\limits_{0}^{\pi} \cos 2x \cos 3x dx$; 10) $\int\limits_{1}^{e} x \ln x dx$.

Вычислите несобственные интегралы или установите их расходимость.

11) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$; 12) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x \ln x}$.

Найдите площадь области, ограниченной линиями. Сделайте чертеж.

13) $3x^2-4y=0$, $2x+4y-1=0$.

Найдите длину дуги кривой.

14) $\begin{cases} x = 5\cos^3 t \\ y = 5\sin^3 t \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$.

Вариант 3.5

Найдите неопределенные интегралы. В двух первых примерах (1 и 2) проверьте результаты дифференцированием.

1) $\int \sin(2-3x)dx$; 2) $\int \frac{(x+19)dx}{x^2-2x-15}$;

3) $\int \sqrt{x^3}\ln x dx$; 4) $\int \frac{x^2 dx}{x^4-16}$;

5) $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$; 6) $\int \frac{e^{2x}dx}{1+e^{4x}}$;

7) $\int \frac{\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{x-2}+1}dx$.

Вычислите определенные интегралы.

8) $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}-3}$; 9) $\int\limits_0^1 x\,arctg\,x dx$; 10) $\int\limits_0^{\pi} \sin 4x \sin 3x dx$.

Вычислите несобственные интегралы или установите их расходимость.

11) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{(x+1)dx}{x^2+2x+2}$; 12) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$.

Найдите площадь области, ограниченной линиями. Сделайте чертеж.

13) $3x^2+4y=0$, $2x+4y+1=0$.

Найдите длину дуги кривой.

14) $\begin{cases} x = 4(t-\sin t) \\ y = 4(1-\cos t) \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$.

Вариант 3.6

Найдите неопределенные интегралы. В двух первых примерах (1 и 2) проверьте результаты дифференцированием.

1) $\int e^{\frac{1}{4}x-2}dx$; 2) $\int \frac{(5x+6)dx}{x^2+4x-12}$;

3) $\int x\sin 5x dx$; 4) $\int \frac{xdx}{x^3-1}$;

5) $\int \frac{dx}{3\cos x + 4\sin x}$; 6) $\int \sqrt{1+e^{3x}} \cdot e^{3x} dx$;

7) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

Вычислите определенные интегралы.

8) $\int_3^6 \frac{\sqrt{x-3}}{x}dx$; 9) $\int_{-\pi}^0 \cos 2x \sin 7x dx$; 10) $\int_1^e \ln x dx$.

Вычислите несобственные интегралы или установите их расходимость.

11) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{5+x^6}$; 12) $\int_0^e \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

Найдите площадь области, ограниченной линиями. Сделайте чертеж.

13) $2x-3y^2=0$, $2x+2y-1=0$.

Найдите длину дуги кривой.

14) $r=2(1-\cos\varphi)$.

Вариант 3.7

Найдите неопределенные интегралы. В двух первых примерах (1 и 2) проверьте результаты дифференцированием.

1) $\int \frac{arctgxdx}{1+x^2}$; 2) $\int \frac{(5x-7)dx}{x^2-x-20}$;

3) $\int (2x+5)\sin xdx$; 4) $\int \frac{(x-1)dx}{x^3+x}$;

5) $\int ctg^2 xdx$; 6) $\int \frac{\sin xdx}{\cos x+3}$;

7) $\int \frac{\sqrt[4]{x}+1}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}dx$.

Вычислите определенные интегралы.

8) $\int\limits_{-\frac{3}{4}}^{0} \frac{dx}{2-\sqrt{1+x}}$; 9) $\int\limits_{-\pi}^{0} \cos 2x \cos 8xdx$; 10) $\int\limits_{0}^{1} xe^x dx$.

Вычислите несобственные интегралы или установите их расходимость.

11) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+8}$; 12) $\int\limits_{0}^{e} \frac{\ln xdx}{x}$.

Найдите площадь области, ограниченной линиями. Сделайте чертеж.

13) $3x^2-2y=0$, $2x-2y+1=0$.

Найдите длину дуги кривой.

14) $r=2\sin\varphi$.

Вариант 3.8

Найдите неопределенные интегралы. В двух первых примерах (1 и 2) проверьте результаты дифференцированием.

1) $\int \frac{\sin x dx}{1-\cos x}$; 2) $\int \frac{5x dx}{x^2+x-6}$;

3) $\int \frac{\ln x dx}{\sqrt{x}}$; 4) $\int \frac{dx}{x^3+8}$;

5) $\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}$; 6) $\int \frac{\sqrt{x+3}dx}{1+\sqrt[3]{x+3}}$;

7) $\int \sqrt[3]{1-e^x}\cdot e^x dx$.

Вычислите определенные интегралы.

8) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{8+\sqrt[3]{x^2}}$; 9) $\int\limits_{-\pi}^{0} \cos 4x \sin 5x dx$; 10) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\cos^2 x}$.

Вычислите несобственные интегралы или установите их расходимость.

11) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x+2}{x^2+4x+8}dx$; 12) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Найдите площадь области, ограниченной линиями. Сделайте чертеж.

13) $4x+3y^2=0$, $4x+2y+1=0$.

Найдите длину дуги кривой.

14) $r=1-\cos\varphi$.

Вариант 3.9

Найдите неопределенные интегралы. В двух первых примерах (1 и 2) проверьте результаты дифференцированием.

1) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x} dx$; 2) $\int \frac{(5x+2)dx}{x^2+2x-8}$;

3) $\int \arcsin \frac{x}{3} dx$; 4) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$;

5) $\int tg^2 x dx$; 6) $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[6]{x^5}} dx$;

7) $\int \frac{e^{3x}}{1+e^{6x}} dx$.

Вычислите определенные интегралы.

8) $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}dx}{4+x}$; 9) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$; 10) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 6x \sin 7x dx$.

Вычислите несобственные интегралы или установите их расходимость.

11) $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+4}$; 12) $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Найдите площадь области, ограниченной линиями. Сделайте чертеж.

13) $3x^2-2y=0$, $2x+2y-1=0$.

Найдите длину дуги кривой.

14) $r=2-2\cos\varphi$.

Вариант 3.10

Найдите неопределенные интегралы. В двух первых примерах (1 и 2) проверьте результаты дифференцированием.

1) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$; 2) $\int \frac{(5x+1)dx}{x^2+2x-15}$;

3) $\int xe^{3x}dx$; 4) $\int \frac{(x+3)dx}{x^3+x^2-2x}$;

5) $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}$; 6) $\int \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x-2}+1}dx$;

7) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$.

Вычислите определенные интегралы.

8) $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{4+\sqrt[3]{x^2}}$; 9) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin\frac{x}{2}dx$; 10) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \sin 7x dx$.

Вычислите несобственные интегралы или установите их расходимость.

11) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x}$; 12) $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$.

Найдите площадь области, ограниченной линиями. Сделайте чертеж.

13) $4x-3y^2=0$, $4x+2y-1=0$.

Найдите длину дуги кривой.

14) $\begin{cases} x=2t-\sin 2t \\ y=1-\cos 2t \end{cases}$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

Список использованной литературы

1. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа [Текст] : учеб. пособие для вузов / Г. Н. Берман. – М. : Наука, 1985. – 384 с.
2. Высшая математика для экономистов [Текст] : учебник / под ред. Н. Ш. Кремера. – 3-е изд. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 479 с.
3. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст] : учеб. пособие для вузов / Б. П. Демидович. – М. : ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2005. – 558 с.
4. Ефимов, А. В. Сборник задач по математике для втузов [Текст] / А. В. Ефимов, Б. П. Демидович. - М. : Изд. «Наука», 1981. - 463 с.
5. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике [Текст] : учеб. пособие / Л. А. Кузнецов. – 5-е изд., стер. – СПб.:Изд-во «Лань», 2005. – 240 с.
6. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике [Текст] / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – 3-е изд., испр. И доп. – М. : Айрис-пресс, 2004. – 576 с.
7. Общий курс высшей математики для экономистов [Текст] : учебник / под ред. В. И. Ермакова. – М.: «Инфра-М», 2002. – 656 с.
8. Очан, Ю. С. Математический анализ [Текст] : учеб. пособие для пед. институтов / Ю. С. Очан, В. Е. Шнейдер. – М. : учеб.-пед. изд-во министерства просвещения РСФСР, 1961. – 880 с.
9. Смирнов, В. И. Курс высшей математики [Текст] : учеб. / В. И. Смирнов. – М. : Гос. изд-во тех.-теоретической лит-ры, 1957. – 480 с.
10. Шипачев, В. С. Задачник по высшей математике [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. С. Шипачев. – 3-е изд., стер. – М. : Высш. школа, 2003. – 304 с.
11. Шипачев, В. С. Курс высшей математики [Текст] : учеб. / В.С. Шипачев. – 2-е изд. М. : «Проспект», 2004. - 600 с.

Рисунки сделаны с помощью программы «Януш» версии 1.1, автором которой является Изаак Д. Д.

ISBN 978-5-903472-05-5

Дмитрий Давидович Изаак

Татьяна Павловна Филоненко

Анна Викторовна Швалёва

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

(ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ)

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Работа отпечатана с оригинала-макета,
предоставленного авторами